Capitolul 6

INTEGRALA TRIPLĂ

Pentru introducerea noţiunii de integrală triplă a unei funcţii definite pe un domeniu de integrare din $\mathbb{R}^3$, vom revizui construcţia utilizată pentru definiţia integralei duble, trecând de la domenii plane (**bi**dimensionale) la domenii spaţiale (**tri**dimensionale). In acest capitol, prin **domeniu de integrare** vom înţelege un domeniu închis şi mărginit (de o suprafaţă netedă pe porţiuni) din $\mathbb{R}^3$, care are volum, din nou fără a intra în detalii asupra noţiunii de volum (practic, asupra „măsurării" volumului). Trecerea de la integrala dublă la cea triplă se va face în principal înlocuind, în diverse noţiuni şi procedee, noţiunea de arie cu cea de volum.

Împărţirea domeniului de integrare în subdomenii

Diviziuni (partiţii) ale unui domeniu de integrare

Fie $V \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu de integrare. Vom spune că o mulţime ordonată de domenii de integrare $\Delta = \{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$ reprezintă o **diviziune** (sau **partiţie**) a lui V dacă

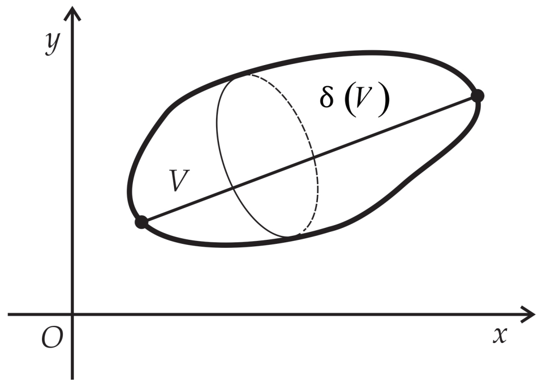
1. $\bigcup\limits_{i=1}^{n} V_i = V$.

2. $\overset{\circ}{V_i} \bigcap \overset{\circ}{V_j} = \emptyset$, pentru orice $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$.

Altfel spus, V se poate scrie ca reuniunea tuturor subdomeniilor V_1, V_2, $\ldots$, V_n, iar aceste subdomenii pot avea comune, două câte două, cel mult suprafeţe de pe frontieră, întrucât au două câte două interioarele disjuncte.

Notaţie

Mulţimea diviziunilor unui domeniu de integrare V se notează $\mathcal{D}_V$.



Diametrul unui domeniu de integrare

Fie $V \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu de integrare. Numim **diametru** al lui V, notat $\delta(V)$, distanţa maximă dintre două puncte ale lui V.

Normă a unei partiţii

Fiind dată o diviziune $\Delta = \{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$, vom numi **normă** a diviziunii Δ, notată $\|\Delta\|$, valoarea maximă a **diametrelor** $\delta(V_1)$, $\delta(V_2)$, $\ldots$, $\delta(V_n)$, adică

$$\|\Delta\| = \max_{1 \leq i \leq n} \delta(V_n).$$

Sisteme de puncte intermediare asociate

Fiind dată o diviziune $\Delta = \{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$, vom numi **sistem de puncte intermediare asociat diviziunii** Δ o mulţime ordonată de puncte

$$C = \{M_1, M_2, \ldots, M_n\},$$

astfel încât $M_i \in V_i$ pentru $1 \leq i \leq n$ (în fiecare subdomeniu se află câte un punct intermediar).

Sume Riemann

Fiind date un domeniu de integrare V, o funcţie $f : V \to \mathbb{R}$, o diviziune $\Delta = \{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$ a domeniului de integrare V şi $C = \{M_1, M_2, \ldots, M_n\}$ un sistem de puncte intermediare asociat diviziunii Δ, $M_i = M_i(\alpha_i, \beta_i . \gamma_i)$, $1 \leq i \leq n$, vom numi **sumă Riemann asociată diviziunii** Δ **şi sistemului de puncte intermediare** C suma

$$\begin{aligned}\sigma_\Delta(f, C) &= \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)\,\mathrm{vol}(D_i)\\ &= f(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)\,\mathrm{vol}(D_1) + f(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)\,\mathrm{vol}(D_2) + \ldots\end{aligned}$$

$$+ f(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)\,\mathrm{vol}(D_n)$$

(valoarea funcţiei în fiecare punct intermediar se înmulţeşte cu volumul subdomeniului din care punctul intermediar face parte, adunându-se rezultatele).

Consideraţii asupra interpretării geometrice a noţiunii de sumă Riemann

Interpretarea geometrică a noţiunii de sumă Riemann nu mai este la fel de intuitivă ca şi cea a noţiunilor similare pentru integrala definită sau cea dublă, în principal datorită faptului că în situaţiile anterioare interpretarea geometrică se făcea cu ajutorul unei noţiuni „cu o dimensiune în plus" faţă de mulţimea pe care urma a se defini integrala. În speţă, o sumă Riemann a unei funcţii definite pe un interval putea fi interpretată cu ajutorul unei arii, iar o sumă Riemann a unei funcţii definite pe un domeniu de integrare din $\mathbb{R}^2$ putea fi interpretată cu ajutorul unui volum. Acum, o sumă Riemann a unei funcţii definite pe un domeniu de integrare din $\mathbb{R}^3$ ar trebui interpretată cu ajutorul unor noţiuni referitoare la spaţiul $\mathbb{R}^4$, adică nu la un spaţiu fizic, ci la un spaţiu abstract.

Funcţii integrabile Riemann

Definiţie. Fie V un domeniu de integrare, $V \subset \mathbb{R}^3$, şi fie $f : V \to \mathbb{R}$. Vom spune că f este **integrabilă Riemann** pe V (pe scurt, f este **integrabilă** pe V) dacă există un număr real I astfel încât oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ cu proprietatea că

oricare ar fi diviziunea $\Delta \in \mathcal{D}_V$ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ şi oricare ar fi sistemul de puncte intermediare C asociat lui Δ, are loc inegalitatea

$$|\sigma_\Delta(f, C) - I| < \varepsilon.$$

Integrala triplă

Numărul I de mai sus se numeşte **integrala triplă** a funcţiei f pe domeniul spaţial V şi se notează

$$\iiint_V f(x, y, z)dxdydz.$$

Să observăm şi că I, dacă există, este unic determinat.

Mulţimea V se numeşte **domeniu de integrare**, funcţia f se numeşte **integrand**, iar variabilele x, y, z se numesc **variabile de integrare**. Expresia $dxdydz$ se numeşte **element de volum**, notat uneori şi cu dV.

Definiţie alternativă

Are loc următoarea echivalenţă, cea de-a doua afirmaţie putând fi utilizată de asemenea ca definiţie a integrabilităţii Riemann.

Teorema 6.1. *Fie V un domeniu de integrare, $V \subset \mathbb{R}^3$, şi fie o funcţie $f : V \to \mathbb{R}$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente.*

1. *f este integrabilă pe V.*
2. *Oricare ar fi un şir de diviziuni $(\Delta_n)_{n\geq 0}$ ale lui V cu $\|\Delta_n\| \to 0$, împreună cu un şir de sisteme de puncte intermediare asociate $(C_n)_{n\geq 0}$, şirul sumelor Riemann $(\sigma_{\Delta_n}(f, C_n))_{n\geq 0}$ este convergent.*

Din nou, se poate demonstra că limita unui astfel de şir de sume Riemann nu depinde nici de alegerea şirului de diviziuni $(\Delta_n)_{n\geq 0}$, nici de alegerea şirului de sisteme de puncte intermediare asociate $(C_n)_{n\geq 0}$. Valoarea (comună) a limitelor reprezintă $\iiint_V f(x, y, z)dxdydz$.

Domeniu de integrare cu volum nul. Integrala funcţiei nule

Cu ajutorul definiţiei, ţinând cont de faptul că toate sumele Riemann asociate sunt nule, putem obţine următoarele proprietăţi.

1. Fie $V \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu de integrare cu volum nul şi fie $f : V \to \mathbb{R}$ integrabilă. Atunci
$$\iiint_V f(x, y, z)dxdydz = 0.$$
2. Fie V un domeniu de integrare. Atunci
$$\iiint_V 0dxdydz = 0.$$

Interpretare geometrică: volum

Fie $V \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu de integrare. Conform definiţiei, se obţine că
$$\iiint_V 1dxdydz = \mathrm{vol}(V).$$
La fel ca şi în cazul integralei definite şi al celei duble, integrându-l pe 1 pe o mulţime obţinem „măsura" acelei mulţimi, în acest caz volumul.

Legătura între integrabilitate şi alte proprietăţi ale funcţiilor

Din nou, funcţiile continue pe un domeniu spaţial $V \subset \mathbb{R}^3$ sunt integrabile. De asemenea, funcţiile integrabile pe un astfel de domeniu sunt mărginite.

Teorema 6.2. *Fie V un domeniu de integrare, $V \subset \mathbb{R}^3$, şi fie $f : V \to \mathbb{R}$, f continuă pe V. Atunci f este integrabilă pe V.*

Teorema 6.3. *Fie V un domeniu de integrare, $V \subset \mathbb{R}^3$, şi fie $f : V \to \mathbb{R}$, f integrabilă pe V. Atunci f este mărginită pe V.*

6.1 Operaţii cu funcţii integrabile

Fiind obţinută printr-un acelaşi tip de procedeu, integrala triplă păstrează toate proprietăţile integralei duble, atât pe cele în raport cu intervalul cât şi pe cele în raport cu funcţia.

Teorema 6.4. *Fie V un domeniu de integrare, $V \subset \mathbb{R}^3$, $f, g : V \to \mathbb{R}$, f, g integrabile pe V, şi $c \in \mathbb{R}$. Au loc următoarele proprietăţi.*

1. **Proprietatea de aditivitate**

   Funcţiile $f + g$ şi $f - g$ sunt integrabile pe V, iar

$$\iiint_V (f(x,y,z) + g(x,y,z))dxdydz = \iiint_V f(x,y,z)dxdydz + \iiint_V g(x,y,z)dxdydz$$

   *(***integrala sumei este egală cu suma integralelor***), respectiv*

$$\iiint_V (f(x,y,z) - g(x,y,z))dxdydz = \iiint_V f(x,y,z)dxdydz - \iiint_V g(x,y,z)dxdydz$$

   *(***integrala diferenţei este egală cu diferenţa integralelor***).*

2. **Proprietatea de omogenitate**

   Funcţia cf este integrabilă pe V, iar

$$\iiint_V cf(x,y,z)dxdydz = c\iiint_V f(x,y,z)dxdydz,$$

(**o constantă cu care se înmulţeşte poate fi trecută de sub integrală înaintea integralei**).

Condensat, formulele de mai sus pot fi scrise sub forma următoare.

Teorema 6.5. *Fie V un domeniu de integrare, $f, g : V \to \mathbb{R}$, f, g integrabile pe V şi $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Atunci $c_1 f + c_2 g$ este integrabilă pe V şi*

$$\iiint_V (c_1 f(x,y,z) + c_2 g(x,y,z))dxdydz = c_1 \iiint_V f(x,y,z)dxdydz + c_2 \iiint_V g(x,y,z)dxdydz.$$

6.2 Proprietăţi ale integralei triple

6.2.1 Proprietăţi în raport cu domeniul

Restrângerea domeniului de integrare

Teorema 6.6. *Fie V un domeniu de integrare, $V \subset \mathbb{R}^3$, şi fie $f : V \to \mathbb{R}$, f integrabilă pe V. Atunci f este integrabilă pe orice subdomeniu $V_1 \subset V$.*

Extinderea domeniului de integrare. Aditivitatea în raport cu domeniul

Teorema 6.7. *Fie V un domeniu de integrare, $V \subset \mathbb{R}^3$, şi fie $f : V \to \mathbb{R}$. Dacă domeniile de integrare V_1, $V_2, \ldots, V_n$ formează o diviziune a lui V, iar f este integrabilă pe $V_1, V_2, \ldots, V_n$, atunci f este integrabilă pe întreg V, iar*

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{V_1} f(x,y,z)dxdydz + \iiint_{V_2} f(x,y,z)dxdydz + \ldots + \iiint_{V_n} f(x,y,z)dxdydz$$

6.2.2 Proprietăţi în raport cu funcţia

Păstrarea inegalităţilor între funcţii

Vom observa în cele ce urmează că şi integrala triplă păstrează semnul funcţiei de integrat şi inegalităţile nestricte între funcţii. În plus, inegalitatea strictă întrun punct comun de continuitate al funcţiilor de integrat atrage inegalitatea strictă pentru integrale.

Teorema 6.8. *Fie V un domeniu de integrare, $V \subset \mathbb{R}^3$, şi fie $f, g : V \to \mathbb{R}$, f, g integrabile pe V.*

1. *Dacă $f(x,y,z) \geq 0$, pentru orice $(x,y,z) \in V$, atunci*
$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz \geq 0.$$
2. *Dacă $f(x,y,z) \geq g(x,y,z)$, pentru orice $(x,y,z) \in V$, atunci*
$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz \geq \iiint_V g(x,y,z)dxdydz.$$
3. *Dacă $f(x,y,z) \geq g(x,y,z)$, pentru orice $(x,y,z) \in V$, şi există $(x_0,y_0,z_0) \in V$ astfel ca*
$$f(x_0,y_0,z_0) > g(x_0,y_0,z_0),\ \text{iar } f,g \text{ sunt continue în } (x_0,y_0,z_0),$$
atunci
$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz > \iiint_V g(x,y,z)dxdydz.$$

Corolar 6.8.1. *Fie V un domeniu de integrare, $V \subset \mathbb{R}^3$, şi fie $f : V \to \mathbb{R}$, f integrabilă pe V. Dacă*
$$m \leq f(x,y,z) \leq M, \quad \text{pentru orice } (x,y,z) \in V,$$
atunci
$$m \cdot \mathrm{vol}(V) \leq \iiint_V f(x,y,z)dxdydz \leq M \cdot \mathrm{vol}(V).$$

Corolar 6.8.2. *Fie V un domeniu de integrare, $V \subset \mathbb{R}^3$, şi fie $f : V \to \mathbb{R}$, f integrabilă pe V. Atunci $|f|$ este integrabilă pe V, iar*
$$\left| \iiint_V f(x,y,z)dxdydz \right| \leq \iiint_V |f(x,y,z)|dxdydz.$$

Teorema de medie

Teorema de medie pentru integrala triplă are o interpretare similară celei obţinute pentru integrala dublă, aria domeniului fiind înlocuită însă de volumul acestuia.

Teorema 6.9. *Fie V un domeniu de integrare, $V \subset \mathbb{R}^3$, şi fie $f : V \to \mathbb{R}$, f continuă pe V. Atunci există $M(c_1, c_2, c_3) \in V$ astfel încât*

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = f(c_1,c_2,c_3)\,\mathrm{vol}(V).$$

6.3 Calculul integralelor triple

Reamintim că, pentru calculul integralelor duble, una dintre posibilele metode de lucru era de a reduce calculul integralei duble la calculul succesiv a două integrale definite, utilizând pe rând cele două variabile ca variabile de integrare. În acest scop, se realizau o **proiecţie** şi o **secţiune**, domeniul numindu-se simplu în raport cu axa paralelă cu domeniul de secţiune în anumite condiţii cu suport geometric.

Ideea de a determina valoarea a unei integrale de ordin superior prin calculul succesiv al unor integrale de ordin mai mic se păstrează şi pentru integrala triplă. Acum, proiecţia se va realiza pe unul dintre planele de coordonate (şi deci integrala „de proiecţie" va fi o integrală dublă), iar secţiunea se va realiza paralel cu una dintre axe (şi deci integrala „de secţiune" va fi o integrală simplă).

6.3.1 Domenii simple în raport cu axa Oz

Fie $V \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu de integrare. V se numeşte **simplu în raport cu** Oz dacă

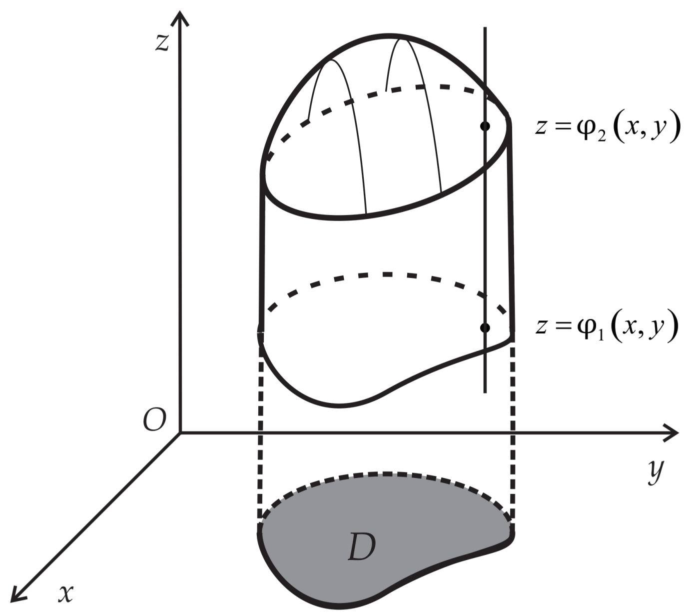
1. Proiecţia lui V pe planul xOy este un domeniu de integrare D în $\mathbb{R}^2$.
2. Există $\varphi_1, \varphi_2 : D \to \mathbb{R}$ continue astfel ca V se poate scrie sub forma

$$V = \{(x,y,z); \varphi_1(x,y) \le z \le \varphi_2(x,y), (x,y) \in D\}.$$

Cea de-a doua condiţie reprezintă faptul că orice paralelă la axa Oz prin $M(x,y)$ din proiecţia lui V pe planul xOy taie frontiera domeniului V în cel mult două puncte, $\varphi_1(x,y)$ fiind coordonata z (cota) punctului de intrare, iar $\varphi_2(x,y)$ fiind cota punctului de ieşire. Cele două puncte pot eventual şi coincide.

Analog se definesc noţiunile de **domeniu simplu în raport cu** Ox şi de **domeniu simplu în raport cu** Oy.

Teorema 6.10. *Fie V un domeniu simplu în raport cu axa Oz şi fie $f : V \to \mathbb{R}$*



integrabilă pe V. Dacă $I : D \to \mathbb{R}$,

$$I(x,y) = \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)dz, \quad \text{pentru } (x,y) \in D,$$

este bine definită şi integrabilă pe D, atunci

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iint_D \left(\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy.$$

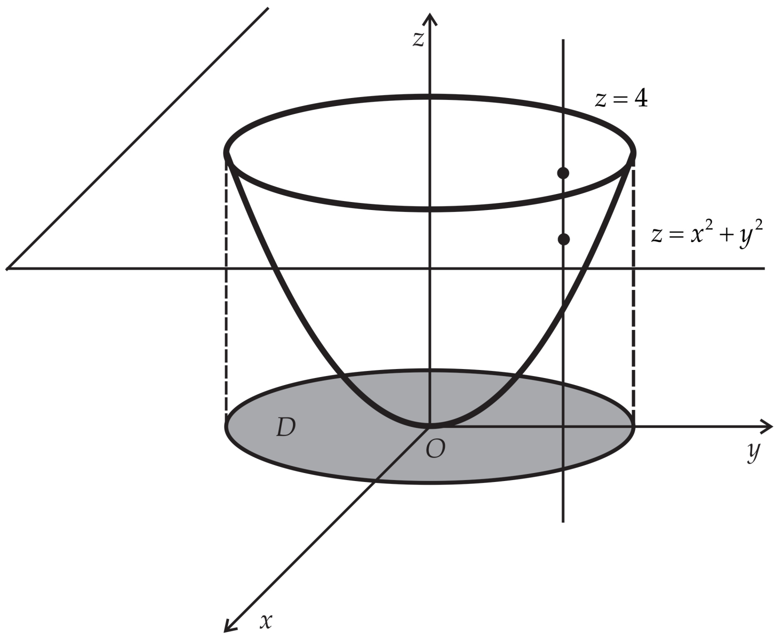
La fel ca şi în cazul integralei duble, ordinea de scriere a integralelor nu este ordinea de calcul. Astfel, mai întâi se calculează integrala interioară (cea în raport cu z), iar abia apoi cea exterioară (cea în raport cu perechea de variabile (x,y)). În particular, ipotezele asupra lui I sunt satisfăcute dacă f este funcţie continuă.

Corolar 6.10.1. *Fie V un domeniu simplu în raport cu axa Oz şi fie $f : V \to \mathbb{R}$ continuă pe V. Atunci*

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iint_D \left(\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy.$$

Formule de calcul similare celor enunţate mai sus au loc şi pentru domenii simple în raport cu Ox sau Oy. În situaţia în care domeniul de integrare este simplu în raport cu mai multe axe, alegerea uneia dintre formule se poate face pe considerente geometrice asupra formei domeniului sau pe baza formei particulare a funcţiei.

Exemplu. Determinaţi volumul corpului V determinat de paraboloidul de rotaţie $z = x^2 + y^2$ şi planul $z = 4$.



Soluţie. Avem că

$$\mathrm{vol}(V) = \iiint_V 1 dxdydz.$$

Domeniul este simplu în raport cu toate cele trei axe. Deoarece V este un corp de rotaţie în jurul lui Oz, iar proiecţia lui V pe xOy este un disc (convenabil descris cu ajutorul coordonatelor polare), vom folosi faptul că V este simplu în raport cu Oz.

Discul D de proiecţie are raza egală cu cea a cercului de intersecţie între paraboloid şi planul $z = 4$, paralel cu planul xOy. Determinăm acum raza cercului de intersecţie. Urmează că

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 4 \end{cases} \Longrightarrow x^2 + y^2 = 4 = 2^2,$$

deci raza cercului de intersecţie este $R = 2$, iar două dintre coordonatele centrului C sunt $x_C = 0$ şi $y_C = 0$. Cea de-a treia coordonată este $z_C = 4$, întrucât cercul de intersecţie este conţinut în planul $z = 4$. Discul de proiecţie D are deci rază 2 şi centru O (proiecţia lui C).

Pentru a determina domeniul de secţiune, ducem o paralelă la axa Oz printr-un punct oarecare (x, y) din domeniul de proiecţie. Observăm că punctul de „intrare" în V al paralelei este situat pe paraboloidul $z = x^2 + y^2$, în timp ce punctul de „ieşire" este situat în planul $z = 4$. Urmează că

$$\text{vol}(V) = \iiint_V 1dxdydz = \iint_D \left(\int_{x^2+y^2}^4 1dz\right) dxdy.$$

Calculăm mai întâi integrala interioară, obţinând că

$$\int_{x^2+y^2}^4 1dz = z\Big|_{x^2+y^2}^4 = 4 - (x^2 + y^2).$$

Atunci

$$\text{vol}(V) = \iint_D (4 - (x^2 + y^2))dxdy.$$

Întrucât D este un disc centrat în origine, pentru calculul integralei duble vom folosi coordonatele polare, sub forma

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}, \quad \rho \in [0, 2], \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad dxdy = \rho d\rho d\theta.$$

Urmează că

$$\begin{aligned}
\text{vol}(V) &= \iint_{[0,2]\times[0,2\pi]} (4 - (\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta))\rho d\rho d\theta \\
&= \iint_{[0,2]\times[0,2\pi]} (4 - \rho^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta))\rho d\rho d\theta \\
&= \iint_{[0,2]\times[0,2\pi]} (4 - \rho^2)\rho d\rho d\theta \\
&= \left(\int_0^2 (4 - \rho^2)\rho d\rho\right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} 1d\theta\right) = I_1 \cdot I_2.
\end{aligned}$$

Deoarece

$$I_1 = \int_0^2 (4 - \rho^2)\rho d\rho = \int_0^2 (4\rho - \rho^3)d\rho = \int_0^2 4\rho d\rho - \int_0^2 \rho^3 d\rho$$

$$= 4\frac{\rho^2}{2}\Big|_0^2 - \frac{\rho^4}{4}\Big|_0^2 = 4 \cdot 2 - \frac{16}{4} = 4,$$

iar

$$I_2 = \int_0^{2\pi} 1 d\theta = \theta \Big|_0^{2\pi} = 2\pi,$$

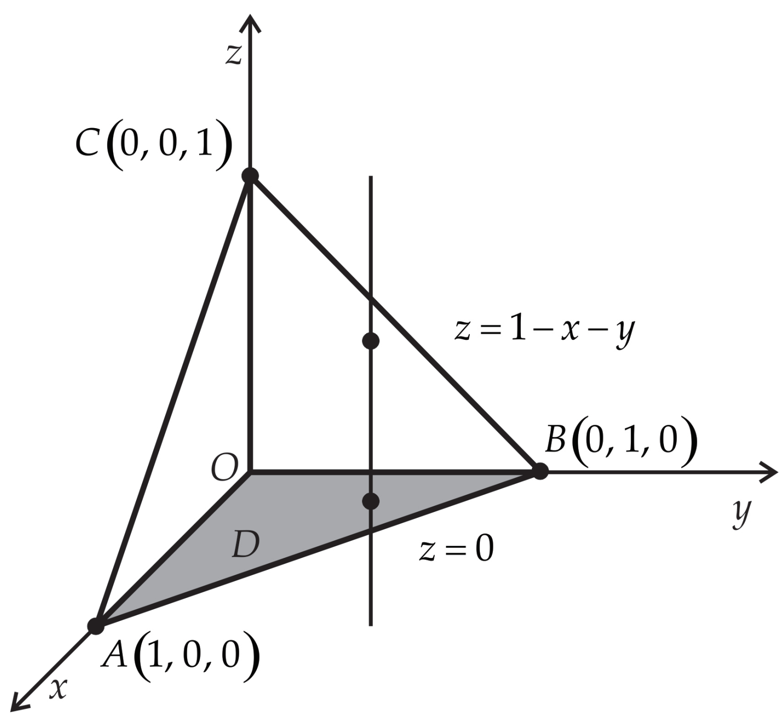
urmează că

$$\mathrm{vol}(V) = 4 \cdot 2\pi = 8\pi.$$

Exemplu. Determinaţi

$$\iiint_V (x + y + z) dxdydz,$$

unde V este domeniul mărginit de planele $x = 0, y = 0, z = 0$ şi $x + y + z = 1$.



Soluţie. Domeniul V, reprezentat în figură, este tetraedrul $OABC$, cu vârfuri $O(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$. El este simplu în raport cu toate axele de coordonate. Pentru calculul integralei, vom folosi faptul că V este simplu în raport cu Oz.

Domeniul de proiecţie este triunghiul OAB, împreună cu interiorul acestuia, domeniu notat în continuare cu D. Pentru a determina domeniul de secţiune, ducem o paralelă la axa Oz prin $M(x,y)$ oarecare din domeniul de proiecţie. Deoarece punctul de intrare al paralelei se află în planul xOy, obţinem că $z_{\text{intrare}} = 0$. Deoarece punctul de ieşire al paralelei se află în planul $x+y+z=1$, obţinem că $z_{\text{ieşire}} = 1-x-y$. Avem atunci

$$\iiint_V (x+y+z)dxdydz = \iint_D \left(\int_0^{1-x-y} (x+y+z)dz \right) dxdy.$$

Calculăm mai întâi integrala interioară. Urmează că

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{1-x-y} (x+y+z)dz = \int_0^{1-x-y} xdz + \int_0^{1-x-y} ydz + \int_0^{1-x-y} zdz \\ &= x\int_0^{1-x-y} 1dz + y\int_0^{1-x-y} 1dz + \frac{z^2}{2}\bigg|_0^{1-x-y} \\ &= xz\bigg|_{z=0}^{z=1-x-y} + yz\bigg|_{z=0}^{z=1-x-y} + \frac{z^2}{2}\bigg|_{z=0}^{z=1-x-y} \\ &= x(1-x-y) + y(1-x-y) + \frac{(1-x-y)^2}{2} \\ &= \frac{1}{2}(1-x-y)(1+x+y) = \frac{1}{2}(1-(x+y)^2). \end{aligned}$$

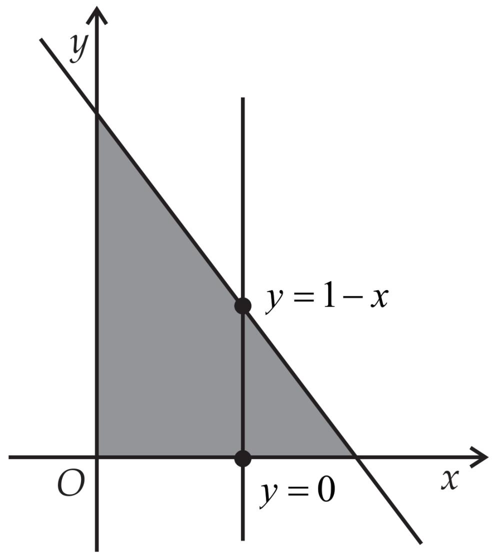
De aici,

$$\begin{aligned} &\iiint_V (x+y+z)dxdydz = \iint_D \frac{1}{2}(1-(x+y)^2)dxdy \\ &\quad = \frac{1}{2}\left[\iint_D 1dxdy - \iint_D (x+y)^2 dxdy\right] = \frac{1}{2}\left[\text{aria}(D) - \iint_D (x+y)^2 dxdy\right]. \end{aligned}$$

Cum D este un triunghi dreptunghic isoscel cu catete de lungimi egale cu 1, avem că $\text{aria}(D) = \frac{1}{2}$.

Rămâne deci să calculăm $\iint_D (x+y)^2 dxdy$. În acest scop, să observăm că domeniul de integrare D este simplu în raport cu ambele axe. Pentru calculul integralei duble, vom folosi faptul că el este simplu în raport cu Oy.

Domeniul de proiecţie (pe Ox) este intervalul $[0,1]$, deoarece abscisa punctului A este 1, iar cea a punctului O este 0. Pentru a determina domeniul de secţiune, ducem o paralelă printr-un punct oarecare din domeniul de proiecţie la Oy. Deoarece punctul de intrare al paralelei se află pe axa Ox, urmează că



$y_{\text{intrare}} = 0$. Punctul de ieşire al paralelei se află pe dreapta AB, a cărei ecuaţie este $\dfrac{x - x_A}{x_B - x_A} = \dfrac{y - y_A}{y_B - y_A}$, sau $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y}{1}$, adică $x + y - 1 = 0$. Urmează că $y_{\text{ieşire}} = 1 - x$. De aici,

$$\iint_D (x+y)^2 dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (x+y)^2 dy \right) dx.$$

Calculăm mai întâi integrala interioară. Avem că

$$\int_0^{1-x} (x+y)^2 dy = \frac{(x+y)^3}{3} \Bigg|_{y=0}^{y=1-x} = \frac{1^3}{3} - \frac{x^3}{3} = \frac{1}{3}(1-x^3).$$

Atunci

$$\begin{aligned}\iint_D (x+y)^2 dxdy &= \int_0^1 \frac{1}{3}(1-x^3)dx = \frac{1}{3}\int_0^1 (1-x^3)dx = \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 \\ &= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

De aici,

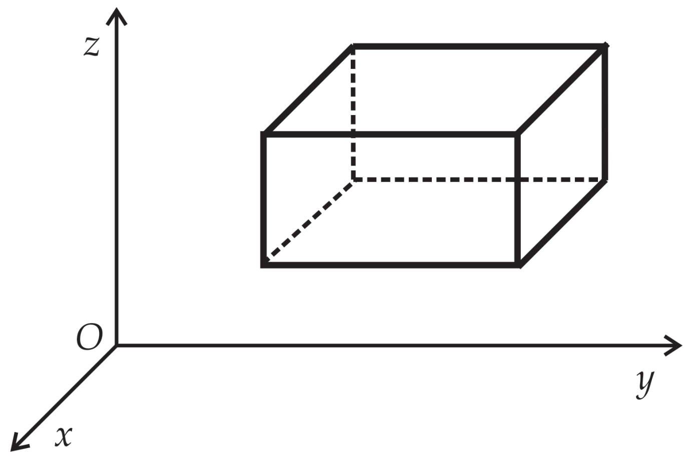
$$\iiint_V (x+y+z)dxdydz = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right] = \frac{1}{8}.$$

6.3.2 Domenii paralelipipedice

La fel ca şi în cazul integralelor duble, formulele de calcul pentru integralele triple se simplifică în mod considerabil atunci când domeniul de integrare este un paralelipiped cu laturile paralele cu axele de coordonate, nemaifiind necesară determinarea domeniului de secţiune. Un astfel de paralelipiped poate fi scris ca un produs cartezian de intervale sub forma

$$V = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3],$$

unde $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, $[a_3, b_3]$, reprezintă intervalele de valori pentru abscisele, respectiv ordonatele şi cotele punctelor din V. În această situaţie, V este simplu în raport cu toate cele 3 axe de coordonate.



Corolar 6.10.2. *Fie* $f : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \to \mathbb{R}$, *f continuă. Atunci*

$$\begin{aligned}\iiint_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]} f(x,y,z)dxdydz &= \iint_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]} \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)dz\right) dxdy \\ &= \iint_{[a_1,b_1]\times[a_3,b_3]} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(x,y,z)dy\right) dxdz \\ &= \iint_{[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x,y,z)dx\right) dydz.\end{aligned}$$

6.3.3 Domenii paralelipipedice şi funcţii separabile ca produse

Dacă domeniul de integrare V este un paralelipiped cu laturile paralele cu axele de coordonate, iar integrandul f se poate scrie ca produs între o funcţie care depinde doar de variabila x, o funcţie care depinde doar de variabila y şi o funcţie care depinde doar de variabila z, atunci integrala triplă $\iiint_V f(x,y,z)dxdydz$ se poate scrie ca un produs de integrale simple.

Teorema 6.11. *Fie* $f : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y) \cdot f_3(z),$$

unde f_1, f_2, f_3 *sunt funcţii continue. Atunci*

$$\begin{aligned}&\iiint_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]} f(x, y, z)dxdydz\\ &= \iiint_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]} f_1(x) \cdot f_2(y) \cdot f_3(z)dxdydz\\ &= \left(\int_{a_1}^{b_1} f_1(x)dx\right) \cdot \left(\int_{a_2}^{b_2} f_2(y)dy\right) \cdot \left(\int_{a_3}^{b_3} f_3(y)dy\right).\end{aligned}$$

Exemplu. Determinaţi

$$\iiint_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\pi]\times[0,1]} \sin x \cos y dxdydz.$$

Soluţie. Domeniul de integrare este un paralelipiped cu laturile paralele cu axele de coordonate, iar integrandul se separă ca un produs între o funcţie doar de variabila x, o funcţie doar de variabila y şi o funcţie constantă, sub forma

$$\sin x \cos y = \sin x \cdot \cos y \cdot 1.$$

Urmează că

$$\begin{aligned}\iiint_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\pi]\times[0,1]} \sin x \cos y dxdydz &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \cdot \int_0^{\pi} \cos y dy \cdot \int_0^1 1 dz\\ &= (-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \sin y\Big|_0^{\pi} \cdot z\Big|_0^1 = 1 \cdot 0 \cdot 1 = 0.\end{aligned}$$

6.3.4 Formula de schimbare de variabilă în integrala triplă

În unele situaţii, fie funcţia de integrat, fie forma geometrică a domeniului se simplifică după schimbări de variabile.

Schimbări de variabilă (transformări regulate)

Fie V_1 un domeniu de integrare mărginit de suprafaţa închisă netedă pe porţiuni S_1 şi V_2 un domeniu de integrare mărginit de suprafaţa închisă netedă pe porţiuni S_2. Spunem că V_2 se transformă în V_1 prin **schimbarea de variabilă** (sau **transformarea regulată**)

$$T : \begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \ , \ (u,v,w) \in V_2, \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$$

dacă

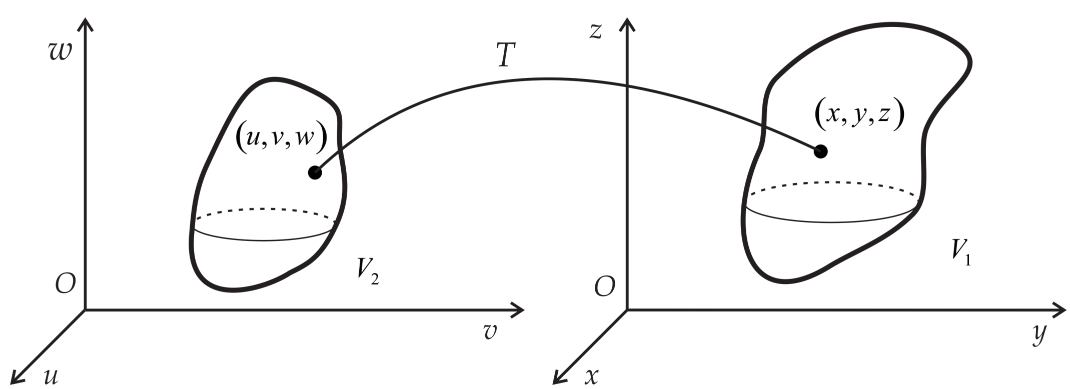
1. T este bijectivă ca funcţie de la V_2 la V_1.

2. Funcţiile $x = x(u,v,w)$, $y = y(u,v,w)$ şi $z = y(u,v,w)$ au derivatele parţiale de ordinul 1 şi derivatele parţiale mixte de ordinul al doilea continue.

3. Determinantul funcţional (numit **determinant jacobian**)

$$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

   este nenul pentru $(u,v,w) \in V_2$.



Formula de schimbare de variabilă

Teorema 6.12. *Fie V_1 un domeniu de integrare mărginit de suprafaţa închisă netedă pe porţiuni S_1 şi V_2 un domeniu de integrare mărginit de suprafaţa închisă netedă pe porţiuni S_2, astfel încât V_2 se transformă în V_1 prin* **schimbarea de variabilă**

(sau **transformarea regulată***)*

$$T : \begin{cases} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{cases}, \ (u, v, w) \in V_2.$$

Fie de asemenea $f : V_1 \to \mathbb{R}$ *o funcţie continuă. Atunci*

$$\iiint_{V_1} f(x, y, z) dxdydz$$
$$= \iiint_{V_2} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \right| dudvdw.$$

În prima parte a membrului drept, **variabilele vechi** x, y şi z se înlocuiesc în funcţie de **variabilele noi** u, v şi w. Cea de-a doua parte a membrului drept reprezintă **formula de transformare a elementului de volum**, care poate fi scrisă sub forma

$$dxdydz = \left| \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \right| dudvdw.$$

6.3.5 Coordonate sferice şi sferice generalizate

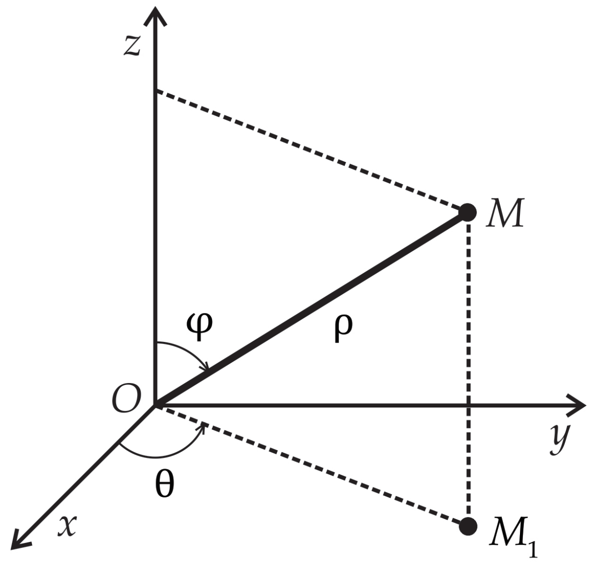
Coordonate sferice

Fiind dat un reper cartezian $Oxyz$ în spaţiu, putem preciza poziţia unui punct $M \notin Oz$ atât prin coordonatele sale carteziene (x, y, z), cât şi prin **coordonatele sale sferice** (ρ, φ, θ), unde

1. ρ reprezintă distanţa între M şi O;
2. φ reprezintă unghiul neorientat între raza vectoare OM şi semiaxa Oz;
3. θ reprezintă unghiul orientat între Ox şi OM_1, M_1 fiind proiecţia lui M pe planul xOy, măsurat în sens trigonometric.

În aceste condiţii, legătura între coordonatele carteziene (x, y, z) şi coordonatele sferice (ρ, φ, θ) este dată de formulele

$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}, \quad \rho > 0, \quad \varphi \in [0, \pi], \quad \theta \in [0, 2\pi).$$



De asemenea,

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\varphi,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho \sin\varphi \cos\theta) & \frac{\partial}{\partial \varphi}(\rho \sin\varphi \cos\theta) & \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho \sin\varphi \cos\theta) \\ \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho \sin\varphi \sin\theta) & \frac{\partial}{\partial \varphi}(\rho \sin\varphi \sin\theta) & \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho \sin\varphi \sin\theta) \\ \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho \cos\varphi) & \frac{\partial}{\partial \varphi}(\rho \cos\varphi) & \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho \cos\varphi) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \rho^2 \sin\varphi \cos^2\varphi \cos^2\theta + \rho^2 \sin^3\varphi \sin^2\theta + \rho^2 \sin\varphi \cos^2\varphi \sin^2\theta + \rho^2 \sin^3\varphi \cos^2\theta.$$

Grupând termenii doi câte doi, obţinem

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\varphi,\theta)} = \rho^2 \sin\varphi\cos^2\varphi(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + \rho^2\sin^3\varphi(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$$
$$= \rho^2\sin\varphi\cos^2\varphi + \rho^2\sin^3\varphi = \rho^2\sin\varphi(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)$$

$$= \rho^2 \sin \varphi.$$

Formula de transformare a elementului de volum

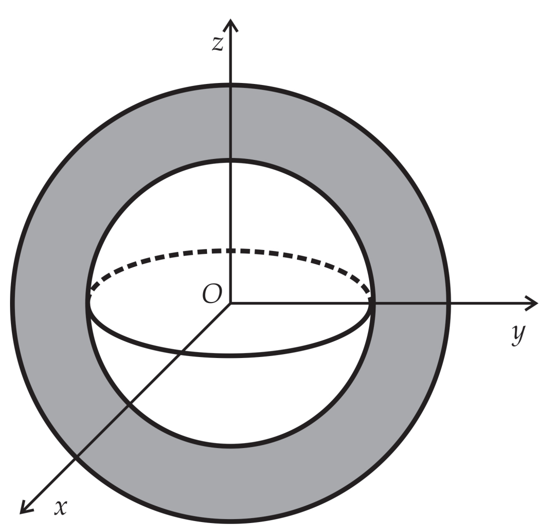
De aici, obţinem următoarea formulă de transformare a elementului de volum pentru trecerea de la coordonate carteziene la coordonate sferice

$$dxdydz = \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta.$$

Utilitatea coordonatelor sferice

Coordonatele sferice sunt utilizate în special pentru integrarea pe domenii sferice (bile sferice), sau porţiuni din aceste domenii, mai ales când aceste domenii sunt centrate în origine. Din nou, în practică, atât pentru ρ cât şi pentru θ vor fi folosite intervalele corespunzătoare închise, întrucât închiderea intervalelor adaugă la domeniu mulţimi de volum nul, ceea ce nu modifică valorile integralelor.

Exemplu. Determinaţi
$$\iiint_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$
unde V este domeniul spaţial mărginit de sferele $(S1): \ x^2+y^2+z^2 = 1$ şi $(S2): \ x^2+y^2+z^2 = 4$.



Soluţie. Sfera $(S1)$ are centrul în origine şi rază $R_1 = 1$, în vreme ce sfera $(S2)$ are centrul tot în origine şi rază $R_2 = 2$. Vom folosi coordonate sferice, sub forma

$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \ , \quad \rho \in [1,2], \quad \varphi \in [0,\pi], \quad \theta \in [0,2\pi], \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$
$$dxdydz = \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta,$$

valorile maximă şi respectiv minimă ale lui ρ fiind deduse din faptul că, întrucât domeniul V este mărginit de cele două sfere, distanţa dintre un punct al său şi origine este minimă şi egală cu 1 când punctul se află pe $(S1)$, respectiv maximă şi egală cu 2 când punctul se află pe $(S2)$. Atunci

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+y^2+z^2} &= \sqrt{\rho^2 \sin^2\varphi \cos^2\theta + \rho^2 \sin^2\varphi \sin^2\theta + \rho^2 \cos^2\varphi} \\ &= \sqrt{\rho^2 \sin^2\varphi(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + \rho^2\cos^2\varphi} = \sqrt{\rho^2 \sin^2\varphi + \rho^2 \cos^2\varphi} \\ &= \sqrt{\rho^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)} = \sqrt{\rho^2} = \rho. \end{aligned}$$

Altfel, se putea observa direct că $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ reprezintă distanţa între punctul curent $M(x,y,z)$ şi originea $O(0,0,0)$, prin definiţie egală cu ρ. Urmează că

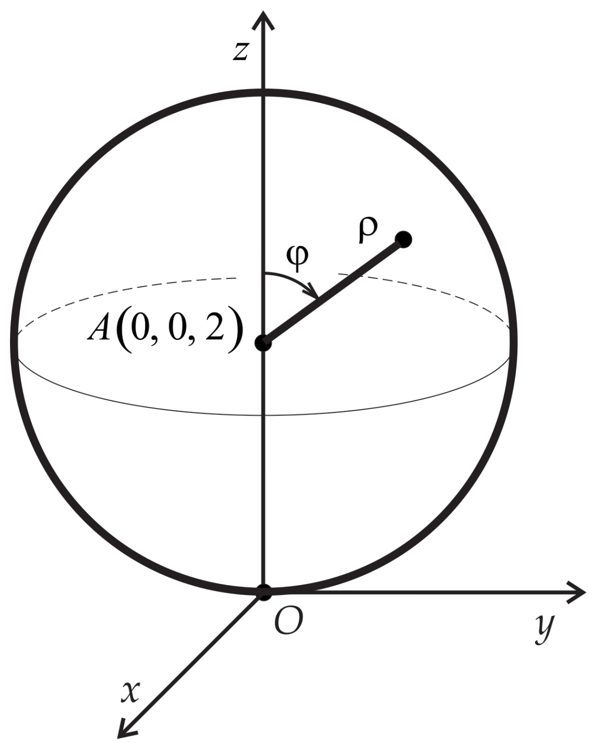
$$\begin{aligned} &\iiint_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \iiint_V \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dxdydz \\ &= \iiint_{[1,2]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]} \frac{1}{\rho} \cdot \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta = \iiint_{[1,2]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]} \rho \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int_1^2 \rho d\rho \cdot \int_0^\pi \sin\varphi d\varphi \cdot \int_0^{2\pi} 1 d\theta = \frac{\rho^2}{2}\Big|_1^2 \cdot (-\cos\varphi)\Big|_0^\pi \cdot \theta\Big|_0^{2\pi} = \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot 2\pi \\ &= 6\pi. \end{aligned}$$

Exemplu. Determinaţi

$$\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2} dxdydz,$$

unde V este domeniul spaţial definit prin

$$V = \left\{(x,y,z); x^2+y^2+z^2 \leq 4z\right\}.$$



Soluţie. Să observăm că

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 4z \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4z + 4 \leq 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + (z-2)^2 \leq 2^2,$$

ceea ce înseamnă că V este o bilă sferică cu centrul în $A(0,0,2)$ şi de rază 2. Putem folosi următoarea schimbare de variabilă, similară coordonatelor sferice, dar care ia în calcul şi poziţia centrului

$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = 2 + \rho\cos\varphi \end{cases}, \quad \rho \in [0,2], \quad \varphi \in [0,\pi], \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Atunci

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\varphi,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta,$$

la fel ca şi în cazul coordonatelor sferice, întrucât adăugarea constantei 2 nu modifică valorile derivatelor parţiale utilizate în calculul determinantului jacobian.

Deoarece

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+y^2+z^2} &= \sqrt{(\rho\sin\varphi\cos\theta)^2+(\rho\sin\varphi\sin\theta)^2+(2+\rho\cos\varphi)^2}\\
&= \sqrt{\rho^2(\sin^2\varphi\cos^2\theta+\sin^2\varphi\sin^2\theta+\cos^2\varphi)+4\rho\cos\varphi+4}\\
&= \sqrt{\rho^2(\sin^2\varphi(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+\cos^2\varphi)+4\rho\cos\varphi+4}\\
&= \sqrt{\rho^2(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)+4\rho\cos\varphi+4}\\
&= \sqrt{\rho^2+4\rho\cos\varphi+4},
\end{aligned}$$

urmează că

$$\begin{aligned}
&\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz\\
&\quad = \iiint_{[0,2]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]} \sqrt{\rho^2+4\rho\cos\varphi+4}\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta\\
&\quad = \iint_{[0,2]\times[0,\pi]} \left(\int_0^\pi \sqrt{\rho^2+4\rho\cos\varphi+4}\cdot\rho^2\sin\varphi d\varphi\right) d\rho d\theta.
\end{aligned}$$

Deoarece

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}(\rho^2+4\rho\cos\varphi+4) = -4\rho\sin\varphi,$$

această din urmă derivată putând fi pusă în evidenţă sub integrală, este avantajos să integrăm mai întâi în raport cu φ şi să folosim metoda de schimbare de variabilă. Pentru calculul integralei

$$I_1 = \int_0^\pi \sqrt{\rho^2+4\rho\cos\varphi+4}\cdot\rho^2\sin\varphi d\varphi,$$

vom folosi deci schimbarea de variabilă

$$u = \rho^2+4\rho\cos\varphi+4 \implies du = -4\rho\sin\varphi d\varphi,$$

ceea ce conduce la

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\rho^2+4\rho+4}^{\rho^2-4\rho+4} \sqrt{u}\cdot\left(-\frac{\rho}{4}\right) du = \frac{\rho}{4}\int_{(\rho-2)^2}^{(\rho+2)^2} \sqrt{u}du = \frac{\rho}{4}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_{(\rho-2)^2}^{(\rho+2)^2} = \frac{\rho}{6}\sqrt{u^3}\Bigg|_{(\rho-2)^2}^{(\rho+2)^2}\\
&= \frac{\rho}{6}\left(\sqrt{(\rho+2)^6}-\sqrt{(\rho-2)^6}\right) = \frac{\rho}{6}\left(|(\rho+2)^3|-|(\rho-2)^3|\right).
\end{aligned}$$

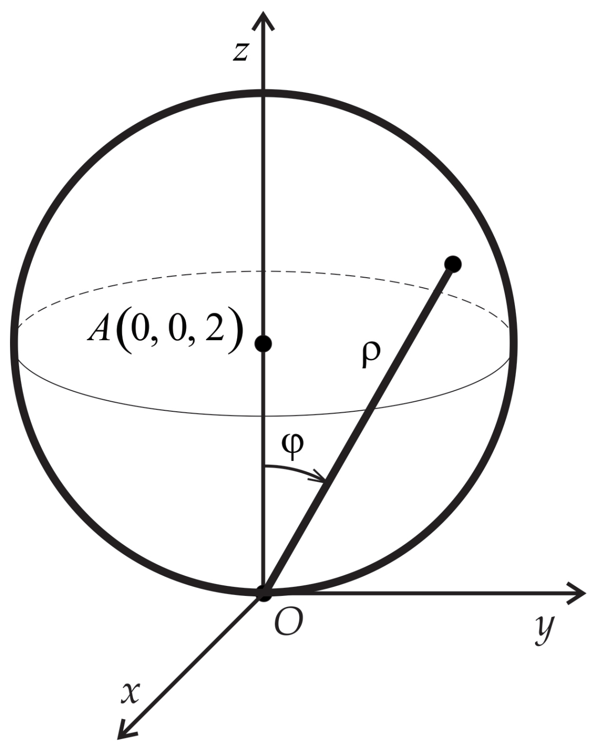
Deoarece $\rho\in[0,2]$, urmează că $\rho-2<0$, iar $|(\rho-2)^3| = (2-\rho)^3$. De aici

$$I_1 = \frac{\rho}{6}\left((\rho+2)^3-(2-\rho)^3\right) = \frac{\rho}{6}(24\rho+2\rho^3) = 4\rho^2+\frac{\rho^4}{3}.$$

Atunci

$$\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz = \iint_{[0,2]\times[0,\pi]} \left(4\rho^2 + \frac{\rho^4}{3}\right) d\rho d\theta$$
$$= \left(\int_0^2 \left(4\rho^2 + \frac{\rho^4}{3}\right) d\rho\right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} 1 d\theta\right) = \left(\frac{4\rho^3}{3} + \frac{\rho^5}{15}\right)\Bigg|_0^2 \cdot 2\pi = \frac{128\pi}{5}.$$

Alternativ, se pot utiliza coordonatele sferice



$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \ , \quad \theta \in [0, 2\pi]. \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$$

Să observăm însă că de această dată $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, domeniul V aflându-se în întregime deasupra planului xOy. Să determinăm transformarea inegalităţii care defineşte domeniul V şi să determinăm de aici valorile lui ρ.

$$x^2 + y^2 + z^2 \le 4z \Leftrightarrow \rho^2 \le 4\rho\cos\varphi \Leftrightarrow \rho \le 4\cos\varphi,$$

Domeniul V se transformă atunci în domeniul V_1 definit prin

$$V_1 = \left\{(\rho,\varphi,\theta); 0 \le \rho \le 4\cos\varphi, \quad \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad \theta \in [0, 2\pi]\right\}.$$

Urmează că

$$\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz = \iint_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,2\pi]} \left(\int_0^{4\cos\varphi} \rho^3 \sin\varphi d\rho\right) d\varphi d\theta$$
$$= \iint_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,2\pi]} \frac{\rho^4}{4}\Bigg|_{\rho=0}^{\rho=4\cos\varphi} \cdot \sin\varphi d\varphi d\theta = \iint_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,2\pi]} 64\cos^4\varphi\sin\varphi d\varphi d\theta$$
$$= 64\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi\sin\varphi d\varphi\right)\cdot\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) = 64 I_1 \cdot 2\pi.$$

Cu schimbarea de variabilă

$$u = \cos\varphi \implies du = -\sin\varphi d\varphi,$$

se obţine că

$$I_1 = \int_1^0 u^4(-du) = \int_0^1 u^4 du = \frac{u^5}{5}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{5},$$

de unde

$$\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz = \frac{128\pi}{5}.$$

Coordonate sferice generalizate

Pentru domenii mărginite de elipsoizi centraţi în origine, sau porţiuni ale acestora, se pot folosi **coordonatele sferice generalizate**. Astfel, pentru un domeniu mărginit de elipsoidul de ecuaţie carteziană $(E): \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$, vor fi folosite coordonatele (ρ,φ,θ) legate de cele carteziene prin relaţiile

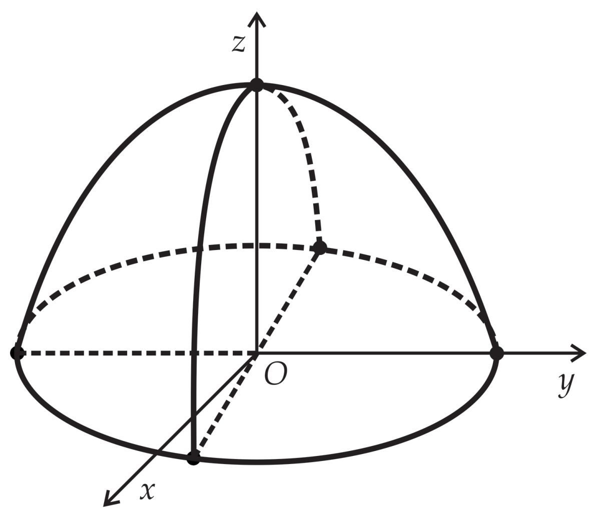
$$\begin{cases} x = a\rho\sin\varphi\cos\theta \\ y = b\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = c\rho\cos\varphi \end{cases}, \quad \rho\in[0,1], \quad \varphi\in[0,\pi], \quad \theta\in[0,2\pi).$$

Printr-un calcul asemănător celui de mai sus se poate deduce că, în acest caz,

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\varphi,\theta)} = abc\rho^2\sin\varphi \implies dxdydz = abc\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta.$$

Exemplu. Determinaţi volumul domeniului V definit prin

$$V = \left\{(x, y, z); \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{25} \leq 1;\ z \geq 0\right\}.$$



Soluţie. Domeniul V este jumătatea superioară a corpului eliptic mărginit de elipsoidul

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{25} = 1,$$

de semiaxe 3, 4, 5. Avem că

$$\mathrm{vol}(V) = \iiint_V 1 dxdydz.$$

Vom folosi coordonatele sferice generalizate, date de

$$\begin{cases} x = 3\rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = 4\rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = 5\rho \cos\varphi \end{cases}, \quad \rho \in [0, 1], \quad \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

intervalul de valori pentru φ fiind dat de faptul că V este jumătatea **superioară** (pentru cea **inferioară** ar fi trebuit $\varphi \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$). În acest caz,

$$dxdydz = 3 \cdot 4 \cdot 5\rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta = 60\rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta.$$

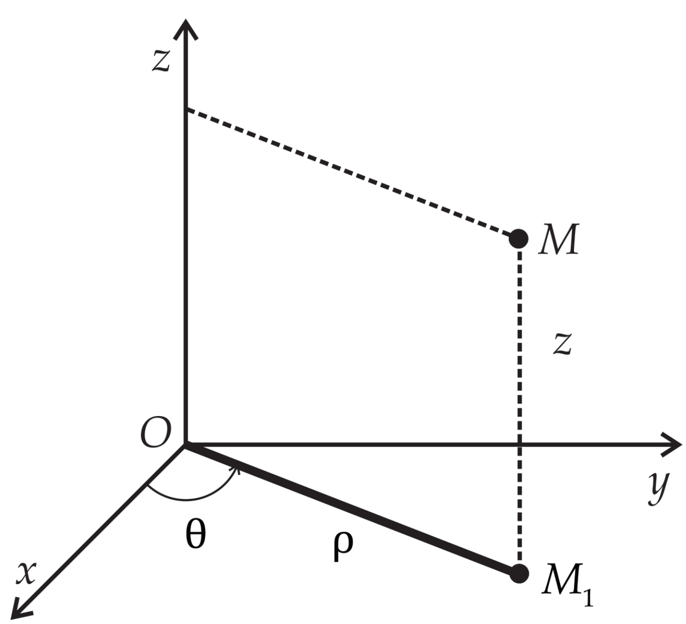
Atunci

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(V) &= \iiint_{[0,1]\times[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,2\pi]} 1\cdot 60\rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta \\
&= 60\cdot\int_0^1 \rho^2 d\rho\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\cdot\int_0^{2\pi}1d\theta = 60\cdot\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^1\cdot(-\cos\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\theta\Big|_0^{2\pi} \\
&= 60\cdot\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 2\pi = 40\pi.
\end{aligned}$$

6.3.6 Coordonate cilindrice

Fiind dat un reper cartezian $Oxyz$ în spaţiu, putem preciza poziţia unui punct $M \notin Oz$ şi prin **coordonatele sale cilindrice** (ρ, θ, z), unde

1. ρ reprezintă distanţa între proiecţia M_1 a lui M pe planul xOy şi O;
2. θ reprezintă unghiul orientat între Ox şi OM_1, măsurat în sens trigonometric.
3. z îşi păstrează semnificaţia.



Altfel spus, coordonatele cilindrice ale unui punct sunt coordonatele polare ale proiecţiei acelui punct pe planul xOy, la care se adaugă coordonata z iniţială. De remarcat faptul că, pentru coordonatele cilindrice, ρ are o semnificaţie diferită faţă de cea avută pentru coordonatele sferice.

În aceste condiţii, legătura între coordonatele carteziene (x, y, z) şi coordonatele cilindrice (ρ, θ, z) este dată de formulele

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}, \quad \rho > 0, \quad \theta \in [0, 2\pi), \quad z \in \mathbb{R}.$$

De asemenea,

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\varphi,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho\cos\theta) & \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho\cos\theta) & \frac{\partial}{\partial z}(\rho\cos\theta) \\ \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho\sin\theta) & \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho\sin\theta) & \frac{\partial}{\partial z}(\rho\sin\theta) \\ \frac{\partial}{\partial \rho}(z) & \frac{\partial}{\partial \theta}(z) & \frac{\partial}{\partial z}(z) \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho,$$

deci

$$dxdydz = \rho d\rho d\varphi d\theta.$$

Utilitatea coordonatelor cilindrice

Coordonatele cilindrice sunt utilizate în special pentru integrarea pe domenii cilindrice sau pe domenii de rotaţie în jurul lui Oz (de exemplu, interioarele unor conuri sau paraboloizi de rotaţie). Din acelaşi motiv ca şi în cazul coordonatelor sferice, în practică, atât pentru ρ cât şi pentru θ vor fi folosite intervalele corespunzătoare închise.

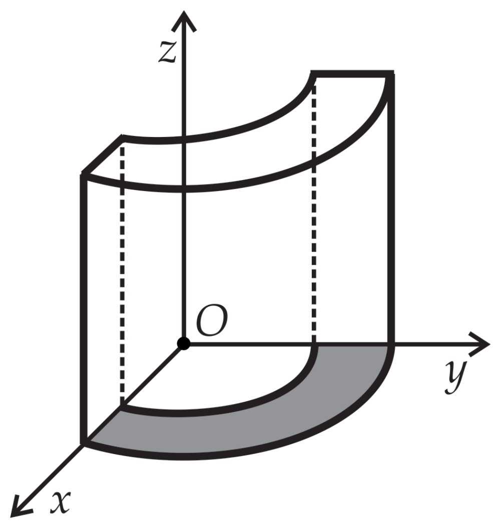
Exemplu. Determinaţi

$$\iiint_V xzdxdydz,$$

unde V este domeniul tridimensional definit de

$$V = \left\{(x,y,z); 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9;\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ 0 \leq z \leq 2\right\}.$$

Domeniul V poate fi privit ca un cilindru cu rază a bazei 3, generatoarea paralelă cu Oz şi înălţime 2, din care se extrage un cilindru de acelaşi tip, dar cu rază a



bazei 2, iar din rezultat se păstrează doar partea din primul octant. Vom folosi coordonate cilindrice, date de

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}, \quad \rho \in [2,3], \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad z \in [0,2], \quad dxdydz = \rho d\rho d\theta dz.$$

Atunci

$$\iiint_V xzdxdydz = \iiint_{[2,3]\times[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,2]} \rho\cos\theta z \cdot \rho d\rho d\theta dz$$
$$= \int_2^3 \rho^2 d\rho \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta \cdot \int_0^2 zdz = \frac{\rho^3}{3}\Bigg|_2^3 \cdot \sin\theta\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{z^2}{2}\Bigg|_0^2 = \frac{19}{3}\cdot 1 \cdot 2$$
$$= \frac{38}{3}.$$

Exemplu. Determinaţi

$$\iiint_V z^2 dxdydz,$$

unde V este domeniul tridimensional definit de

$$V = \left\{(x,y,z); x^2+y^2 \le z^2, 0 \le z \le 1\right\}.$$

Soluţie. Domeniul V este un con de rotaţie în jurul lui Oz, cu vârful în origine. Deşi V nu este un cilindru, coordonatele cilindrice sunt potrivite pentru reprezentarea lui V, datorită caracteristicii acestuia de a fi corp de rotaţie în jurul lui

Oz. Vom folosi deci coordonate cilindrice, date de

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}, \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad z \in [0, 1], \qquad dxdydz = \rho d\rho d\theta dz.$$

Rămâne deci să determinăm intervalul de valori pentru ρ. Condiţia $x^2 + y^2 \leq z^2$ se transformă atunci în

$$(\rho\cos\theta)^2 + (\rho\sin\theta)^2 \leq z^2 \implies \rho^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \leq z^2 \implies \rho^2 \leq z^2.$$

Ţinând seama că $0 \leq z \leq 1$, $\rho \geq 0$, ultima condiţie este echivalentă cu $\rho \leq z$. Atunci

$$\iiint_V z^2 dxdydz = \iiint_{V_1} z^2 \rho d\rho d\theta dz, \quad V_1 = \{(\rho, \theta, z); \theta \in [0, 2\pi], \rho \leq z, 0 \leq z \leq 1\}.$$

Deoarece domeniul V_1 este simplu în raport cu Oz, urmează că

$$\begin{aligned}
\iiint_{V_1} z^2 \rho d\rho d\theta dz &= \iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} \left(\int_\rho^1 \rho z^2 dz \right) d\rho d\theta = \iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} \rho \frac{z^3}{3} \Bigg|_{z=\rho}^{z=1} d\rho d\theta \\
&= \iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} \frac{1}{3}\rho(1-\rho^3) d\rho d\theta = \frac{1}{3} \left(\int_0^1 (\rho - \rho^4) d\rho \right) \left(\int_0^{2\pi} 1 d\theta \right) \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^5}{5} \right) \Bigg|_0^1 \cdot 2\pi = \frac{\pi}{5}.
\end{aligned}$$

6.4 Aplicaţii ale integralei triple

6.4.1 Centrul de masă al unui corp

Corpuri neomogene

Teorema 6.13. *Fie un corp* **neomogen** *V, asimilabil unui domeniu de integrare, cu densitate variabilă $\rho(x, y, z)$. Atunci masa corpului este*

$$m = \iiint_V \rho(x, y, z) dxdydz$$

iar coordonatele centrului de masă al corpului sunt

$$x_{CM} = \frac{1}{m} \iiint_V x\rho(x,y,z)dxdydz, \quad y_{CM} = \frac{1}{m} \iiint_V y\rho(x,y,z)dxdydz,$$
$$z_{CM} = \frac{1}{m} \iiint_V z\rho(x,y,z)dxdydz.$$

Corpuri omogene

Pentru corpuri omogene, cu $\rho(x,y,z) = \rho =$ constant, urmează că

$$m = \iiint_V \rho dxdydz = \rho \iiint_D 1dxdydz = \rho \operatorname{vol}(V),$$

şi similar

$$x_{CM} = \frac{\iiint_V xdxdydz}{\iiint_V 1dxdydz} = \frac{\iiint_V xdxdydz}{\operatorname{vol}(V)}, \quad y_{CM} = \frac{\iiint_V ydxdydz}{\iiint_V 1dxdydz} = \frac{\iiint_V ydxdydz}{\operatorname{vol}(V)}$$
$$z_{CM} = \frac{\iiint_V zdxdydz}{\iiint_V 1dxdydz} = \frac{\iiint_V zdxdydz}{\operatorname{vol}(V)}.$$

Exemplu. Determinaţi coordonatele centrului de masă al corpului omogen V definit prin

$$V = \left\{(x,y,z);\ x^2+y^2+z^2 \leq R^2; z \leq 0\right\}, \quad \text{unde } R > 0.$$

Soluţie. Corpul respectiv este jumătatea superioară a bilei sferice cu rază R centrată în origine. Atunci

$$x_{CM} = \frac{\iiint_V xdxdydz}{\iiint_V 1dxdydz}, \qquad y_{CM} = \frac{\iiint_V ydxdydz}{\iiint_V 1dxdydz}, \qquad z_{CM} = \frac{\iiint_V zdxdydz}{\iiint_V 1dxdydz},$$

pentru calculul acestor integrale putând fi folosite coordonate sferice, date de

$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}, \quad \rho \in [0,R], \quad \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

$$dxdydz = \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta.$$

Com volumul lui V este jumătate din volumul unei bile sferice de rază R, adică $\frac{1}{2}\frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4\pi R^3}{6}$, urmează că

$$\begin{aligned}
x_{CM} &= \frac{\iiint_{[0,R]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]} \rho\sin\varphi\sin\theta\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta}{\frac{4\pi R^3}{6}} \\
&= \frac{6}{4\pi R^3}\cdot\int_0^R \rho^3 d\rho\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi d\varphi\cdot\int_0^{2\pi}\sin\theta d\theta.
\end{aligned}$$

Deoarece

$$\int_0^{2\pi}\sin\theta d\theta = (-\cos\theta)\Big|_0^{2\pi} = 0,$$

urmează că $x_{CM} = 0$. Cu un raţionament similar, putem obţine că $y_{CM} = 0$. De fapt, la aceste concluzii se puteau obţine şi observând că axa Oz este axă de simetrie pentru V. Atunci şi centrul de masă se află pe această axa, deci $x_{CM} = 0$, $y_{CM} = 0$, întrucât toate punctele de pe Oz au abscisa şi ordonata nulă.

De asemenea,

$$\begin{aligned}
z_{CM} &= \frac{\iiint_{[0,R]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]} \rho\cos\varphi\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta}{\frac{4\pi R^3}{6}} \\
&= \frac{6}{4\pi R^3}\cdot\int_0^R \rho^3 d\rho\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi d\varphi\cdot\int_0^{2\pi} 1 d\theta \\
&= \frac{3}{2\pi R^3}\cdot\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^R\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\sin 2\varphi d\varphi\cdot\theta\Big|_0^{2\pi} \\
&= \frac{3}{2\pi R^3}\cdot\frac{R^4}{4}\cdot\frac{1}{2}\frac{(-\cos 2\varphi)}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot 2\pi \\
&= \frac{6\pi R^4}{16\pi R^3}\cdot\frac{(-\cos 2\varphi)}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3R}{8}\cdot 1 = \frac{3R}{8}.
\end{aligned}$$

6.4.2 Momentele de inerţie ale unui corp

Teorema 6.14. *Fie un corp* **neomogen** V*, asimilabil unui domeniu de integrare, cu densitate variabilă* $\rho(x,y,z)$*. Atunci momentele de inerţie ale corpului în raport cu axele de coordonate sunt*

$$I_x = \iiint_V (y^2+z^2)\rho(x,y,z)dxdydz, \quad I_y = \iiint_V (x^2+z^2)\rho(x,y,z)dxdydz$$
$$I_z = \iiint_V (x^2+y^2)\rho(x,y,z)dxdydz,$$

momentele de inerţie ale corpului în raport cu planele de coordonate sunt

$$I_{xOy} = \iiint_V z^2\rho(x,y,z)dxdydz, \quad I_{yOz} = \iiint_V x^2\rho(x,y,z)dxdydz$$
$$I_{xOz} = \iiint_V y^2\rho(x,y,z)dxdydz,$$

iar momentul de inerţie al corpului în raport cu originea este

$$I_O = \iiint_V (x^2+y^2+z^2)\rho(x,y,z)dxdydz.$$

Aplicaţii

6.1. *Reprezentaţi grafic următoarele mulţimi*

1) $V = \left\{(x,y,z); x^2+y^2+z^2 = 25\right\}$; 2) $V = \left\{(x,y,z); 9 \le x^2+y^2+z^2 \le 16\right\}$;
3) $V = \left\{(x,y,z); x^2+y^2 = 9\right\}$; 4) $V = \left\{(x,y,z); 1 \le x^2+y^2 \le 4\right\}$;
5) $V = \left\{(x,y,z); z = x^2+y^2\right\}$; 6) $V = \left\{(x,y,z); 2z \ge x^2+y^2\right\}$;
7) $V = \left\{(x,y,z); z = \sqrt{x^2+y^2}\right\}$; 8) $V = \left\{(x,y,z); 2z \le \sqrt{x^2+y^2}\right\}$.

6.2. *Determinaţi valorile următoarelor integrale pe domenii paralelipipedice*

1) $\displaystyle\iiint_{[0,1]\times[1,2]\times[0,\frac{\pi}{2}]} xy^2e^{y^3}\cos z dxdydz$; 2) $\displaystyle\iiint_{[1,e]\times[2,3]\times[0,1]} \frac{\ln x}{x} ye^z dxdydz$;
3) $\displaystyle\iiint_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{4}]\times[0,1]} \sin x \cos y dxdydz$.

6.3. *Determinaţi valorile următoarelor integrale pe domenii paralelipipedice*

1) $\displaystyle\iiint_{[0,1]\times[1,2]\times[1,3]} \frac{1}{(x+y+z)^3} dxdydz$; 2) $\displaystyle\iiint_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{2}]} \sin(x+y+z) dxdydz$.

6.4. *Determinaţi* $\iiint_V z dxdydz$*, unde* V *este corpul prismatic mărginit de planele de coordonatele şi de planele* $(P_1) : z = h$ *şi* $(P_2) : x + y = R$*, unde* $h, R > 0$*.*

6.5. *Determinaţi*

$$\iiint_V z\sqrt{x^2 + y^2} dxdydz,$$

unde V *este domeniul mărginit de paraboloidul* $(P) : z = x^2 + y^2$ *şi sfera* $(S) : x^2 + y^2 + z^2 = 6$*.*

6.6. *Determinaţi* $\iiint_V \sqrt{y^2 + z^2} dxdydz$*, unde* V *este corpul mărginit de paraboloidul* $(P) : x = y^2 + z^2$ *şi planul* $(P_1) : x = 9$*.*

6.7. *Cu ajutorul coordonatelor sferice, determinaţi*

1. $\iiint_V xyz dxdydz$*,* $V = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, x, y, z \geq 0\}$*.*
2. $\iiint_V (\sqrt{x^2 + y^2} + z dxdydz$*,* $V = \{(x, y, z); 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\}$*.*
3. $\iint_V (x + y) dxdydz$*, unde* V *este domeniul mărginit de sfera* $(S) : x^2 + y^2 + z^2 = 4$ *şi conul* $(C) : z = \sqrt{x^2 + y^2}$*.*
4. $\iiint_V \sqrt{3 + (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} dxdydz$*, unde* V *este bila sferică cu centrul în origine şi rază* 1*.*

6.8. *Cu ajutorul coordonatelor cilindrice, determinaţi*

1. $\iiint_V z dxdydz$*,* $V = \{(x, y, z); 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, x, y \geq 0, 0 \leq z \leq 1\}$*.*
2. $\iiint_V z^3 dxdydz$*,* V *fiind domeniul mărginit de conul* $(c) : z = \sqrt{x^2 + y^2}$ *şi planul* $(P) : z = 4$*.*
3. $\iiint_V xy(1 - 2z) dxdydz$*,* V *fiind domeniul mărginit de cilindrul* $(C) : x^2 + y^2 = 1$*, paraboloidul* $(P) : z = x^2 + y^2$ *şi planul* $(P_1) : z = 0$*.*
4. $\iiint_V xy dxdydz$*,* V *fiind domeniul mărginit de paraboloizii* $(P_1) : z = x^2 + y^2$ *şi* $(P_2) : z = 8 - x^2 - y^2$*.*

6.9. *Determinaţi*

$$\iiint_V z dxdydz, \qquad V = \left\{(x,y,z); \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 \leq 1, z \geq 0\right\}.$$

1. *folosind faptul că domeniul este simplu în raport cu Oz;*
2. *folosind coordonatele sferice generalizate.*

6.10. *Determinaţi*

$$\iiint_V z^2 dxdydz, \qquad V = \left\{(x,y,z); x^2 + y^2 \leq 2z, 0 \leq z \leq 2\right\}.$$

1. *folosind faptul că domeniul este simplu în raport cu Oz;*
2. *folosind coordonatele cilindrice.*

6.11. *Determinaţi volumul corpului mărginit de sfera* $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 8$ *şi paraboloidul* $(P): x^2 + y^2 = 2z$*, situat deasupra planului xOy.*

6.12. *Determinaţi volumul corpului mărginit de paraboloizii* $(P_1): z = x^2 + y^2$ *şi* $(P_2): 2 - z = x^2 + y^2$*.*

6.13. *Determinaţi coordonatele centrelor de greutate ale următoarelor corpuri omogene*

1. *Tetraedrul cu vârfurile* $O(0,0,0)$*,* $A(1,0,0)$*,* $B(0,1,0)$*,* $C(0,0,1)$*.*
2. *Corpul mărginit de paraboloidul* $(P): z = x^2 + y^2$ *şi planul* $(P_1): z = 4$*.*
3. *Corpul mărginit de paraboloidul* $(P): z = x^2 + y^2$ *şi sfera* $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 6$*, situat deasupra planului xOy.*