

# Capitolul 1

## PRIMITIVE

### 1.1 Primitive

#### Definiția noțiunii de primitivă

Una dintre problemele centrale ale calculului diferențial este determinarea derivatelelor unei funcții date, de una sau mai multe variabile. Calculul integral se ocupă, printre alte lucruri, cu o problemă de natură inversă, anume: fiind dată o funcție  $f$ , se dorește „recuperarea” funcției  $F$  din care  $f$  se obține prin derivare.

**Definiție.** Fie  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , unde  $I \subset \mathbb{R}$  este un interval. Spunem că  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  este o **primitivă** a lui  $f$  pe  $I$  dacă  $F$  este derivabilă pe  $I$ , iar  $F'(x) = f(x)$  pentru orice  $x \in I$ .

**Exemple.** Funcția  $F_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F_1(x) = x^2$  este o primitivă a lui  $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_1(x) = 2x$ , pe  $\mathbb{R}$ , deoarece  $(x^2)' = 2x$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .

Funcția  $F_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F_2(x) = \sin x$  este o primitivă a lui  $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_2(x) = \cos x$ , pe  $\mathbb{R}$ , deoarece  $(\sin x)' = \cos x$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .

Funcția  $F_3 : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F_3(x) = \ln x$  este o primitivă a lui  $f_3 : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_3(x) = \frac{1}{x}$ , pe  $(0, \infty)$ , deoarece  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ , pentru orice  $x \in (0, \infty)$ .

#### Primitiva unei funcții date nu este unică

Totuși, este ușor de observat că o funcție dată poate avea mai mult de o primitivă. Mai precis, nu doar  $F_1$  este o primitivă a lui  $f_1$  pe  $\mathbb{R}$ . Întrucât

$$(x^2 + C)' = 2x, \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R} \text{ și orice constantă } C \in \mathbb{R},$$

de fapt orice funcție de forma  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = x^2 + C$  este o primitivă a lui  $f_1$  pe  $\mathbb{R}$ . Rămâne de observat, desigur, dacă  $f_1$  mai are și alte primitive în afară de acestea și dacă situația în cauza (adunând la o primitivă dată o constantă oarecare obținem o altă primitivă) este întâlnită și pentru alte funcții.

**Teorema 1.1.** Fie  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ , unde  $I \subset \mathbb{R}$  este un interval. Au loc următoarele afirmații.

1. Dacă  $F$  este o primitivă a lui  $f$  pe  $I$ , atunci  $F + C$  este de asemenea o primitivă a lui  $f$  pe  $I$ , pentru orice constantă  $C \in \mathbb{R}$ .
2. Dacă  $F_1, F_2$  sunt primitive ale lui  $f$  pe  $I$ , atunci ele diferă printr-o constantă.

**Demonstrație.** 1. Deoarece  $F$  este o primitivă a lui  $f$  pe  $I$ , rezultă că  $F'(x) = f(x)$ , pentru orice  $x \in I$ . Fie  $C \in \mathbb{R}$  o constantă oarecare. Atunci

$$(F + C)'(x) = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x), \quad \text{pentru orice } x \in I,$$

deci  $F + C$  este de asemenea o primitivă a lui  $f$  pe  $I$ .

2. Deoarece  $F_1, F_2$  sunt primitive ale lui  $f$  pe  $I$ , rezultă că  $F_1, F_2$  sunt derivabile pe  $I$ , iar  $F_1'(x) = f(x)$ ,  $F_2'(x) = f(x)$ , pentru orice  $x \in I$ . Atunci  $F_1 - F_2$  este derivabilă pe  $I$ , iar

$$(F_1 - F_2)'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0, \quad \text{pentru orice } x \in I,$$

de unde deducem că  $F_1 - F_2$  este constantă pe intervalul  $I$ , având derivata nulă pe acest interval. ■

### Existența primitivelor unei funcții

În cele de mai sus, am precizat proprietăți ale primitivelor unei funcții date, admitând că aceste primitive există. Totuși, este posibil ca acest lucru să nu se întâmple. Mai precis, ca să existe o primitivă a unei funcții  $f$ , ar trebui ca  $f$  să fie derivata acestei primitive (funcție derivabilă, conform definiției). Reamintindu-ne că derivata oricărei funcții derivabile pe un interval are proprietatea lui Darboux (a valorii intermediare) pe acel interval, observăm că, pentru a exista o primitivă a unei funcții  $f$  pe un interval  $I$  este necesar (dar nu și suficient) ca  $f$  să aibă proprietatea lui Darboux pe  $I$ .

De aici, obținem că pentru o funcție care nu are proprietatea lui Darboux nu există primitive.

**Definiție.** In cele ce urmează, vom spune că  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I \subset \mathbb{R}$  interval, **admite primitive** dacă există măcar o primitivă a lui  $f$  pe  $I$ .

**Definiție.** Fiind dată  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  care admite primitive, unde  $I \subset \mathbb{R}$  este un interval, vom nota cu

$$\int f(x)dx$$

mulțimea tuturor primitivelor lui  $f$ , numită și **integrala nedefinită** a lui  $f$ . Se folosește și notația

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

unde  $F$  este o primitivă oarecare a lui  $f$ , aleasă convenabil, iar  $C$  reprezintă mulțimea funcțiilor constante pe  $I$ . Semnul  $\int$  se numește **integrală**, iar funcția  $f$  se numește **integrand**, operația prin care se determină primitivele unei funcții date numindu-se **integrare**. De asemenea, variabila  $x$  se numește **variabilă de integrare**.

**Exemple.**

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int e^x dx = e^x + C, \quad \int 2x dx = x^2 + C.$$

### Funcțiile continue admit primitive

S-a observat anterior ce fel de funcții nu au primitive. Mai important, rămâne acum să observăm ce fel de funcții au primitive. În acest sens, se va demonstra în Capitolul 2 că orice funcție continuă pe un interval  $I$  admite primitive pe acel interval.

### Operații cu mulțimea funcțiilor constante

Întrucât suma a două funcții constante este tot o funcție constantă, respectiv produsul dintre o constantă și o funcție constantă este tot o funcție constantă, au loc proprietățile

$$C + C = C, \quad \lambda C = C, \quad \text{pentru } \lambda \neq 0.$$

### Legătura între operațiile de integrare și derivare

Ținând cont de definiția noțiunii de primitivă, rezultă că, dacă  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  admite primitive, unde  $I \subset \mathbb{R}$  este un interval, iar  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  este o primitivă a sa, atunci

$$F'(x) = f(x), \text{ pentru orice } x \in I, \quad \text{iar } \int f(x)dx = F(x) + C,$$

situație sistematizabilă sub următoarele forme

$$f \overset{\text{integrare}}{\underset{\text{derivare}}{\rightleftharpoons}} F, \quad \int F'(x)dx = F(x) + C.$$

Într-un sens oarecum imprecis (întrucât integrala lui  $F'$  nu este  $F$ , ci  $F + C$ ), dar suficient de sugestiv, putem spune că operațiile de integrare și derivare sunt operații inverse.

### Integrarea unei derivate de ordin superior

Întrucât operația de integrare „anulează” o singură operație de derivare, putem observa și că, dacă  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ , este de  $n + 1$  ori derivabilă pe intervalul  $I$ , atunci

$$\int F^{(n+1)}(x)dx = F^{(n)}(x) + C.$$

### Legătura între formulele de integrare și cele de derivare

Întrucât operațiile de integrare și derivare sunt operații inverse, oricărei formule de derivare îi corespunde o formulă de integrare, obținută prin citirea în sens invers a formulei de derivare. Astfel,

$$\begin{aligned} (\sin x)' = \cos x &\implies \int \cos x dx = \sin x + C, \\ (\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2} &\implies \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x + C. \end{aligned}$$

În plus, corectitudinea oricărei operații de integrare poate fi verificată derivând rezultatul obținut. În cazul determinării corecte a unei primitive, după derivarea rezultatului se va obține funcția de sub integrala inițială.

### Terminologie

Trebuie observat că denumirile „integrală” și „primitivă” nu sunt interschimbabile, primitiva reprezentând o **singură** funcție, iar integrala reprezentând o **mulțime** de funcții.

### Funcții definite pe reuniunea unor intervale

Definiția noțiunii de primitivă se poate extinde pentru funcții ale căror domenii sunt alcătuite din reuniunea mai multor intervale disjuncte. Totuși, în această situație, diferența dintre două primitive ale unei funcții date nu mai este neapărat constantă, întrucât pe fiecare interval din domeniu primitivele pot să difere printr-o altă constantă.

**Exemplu.** Funcțiile

$$F_1, F_2 : (0, 1) \cup (2, 3) \rightarrow \mathbb{R}, \quad F_1(x) = \begin{cases} x^2 + 4, & x \in (0, 1) \\ x^2 + 5, & x \in (2, 3) \end{cases}, \quad F_2(x) = x^2$$

sunt primitive ale funcției  $f : (0, 1) \cup (2, 3)$ ,  $f(x) = 2x$ , dar diferența lor ( $F_1 - F_2$ )( $x$ ) =  $\begin{cases} 4, & x \in (0, 1) \\ 5, & x \in (2, 3) \end{cases}$  nu este constantă.

**Integralele unor funcții uzuale**

În cele ce urmează vom sistematiza integralele unor funcții uzuale, cu unele comentarii. Prin  $I$  vom nota un interval oarecare,  $I \subset \mathbb{R}$ .

**Integrala funcției putere**

$$\begin{aligned} \int x^n dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, & x \in I \subset \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}; \\ \int x^p dx &= \frac{x^{p+1}}{p+1} + C, & x \in I \subset (0, \infty), p \in \mathbb{R}, p \neq -1; \\ \int 1 dx &= x + C, & x \in I \subset \mathbb{R}; \\ \int \frac{1}{x} dx &= \ln |x| + C, & x \in I \subset (0, \infty) \quad \text{sau } x \in I \subset (-\infty, 0). \end{aligned}$$

Să notăm că, pentru primele două formule, exponenții numărătorilor sunt egali cu numitorii, operația de integrare fiind asociată cu o operație de împărțire. De asemenea, prin integrare, puterea crește (**increases**, în limba engleză), în vreme ce prin derivare puterea descrește (**decreases**, în limba engleză), primele litere ale cuvintelor furnizând regula mnemotehnică.

**Integrala funcției exponențiale**

$$\begin{aligned} \int e^x dx &= e^x + C, & x \in I \subset \mathbb{R} \\ \int a^x dx &= \frac{a^x}{\ln a} + C, & x \in I \subset \mathbb{R}, a > 0. \end{aligned}$$

Din nou, integrarea funcției exponențiale cu baza diferită de  $e$  este asociată unei operații de împărțire.

**Integralele funcțiilor sin și cos și ale unor funcții în care intervin sin și cos**

$$\int \sin x dx = -\cos x + C, \quad x \in I \subset \mathbb{R}$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad x \in I \subset \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad x \in I \subset (k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C, \quad x \in I \subset (k\pi + \frac{\pi}{2}, (k+1)\pi + \frac{\pi}{2}), k \in \mathbb{Z}.$$

Semnele cu care apar integralele funcțiilor sin și cos sunt inverse semnelor cu care apar derivatele acestora. Semnul integralei funcției  $\frac{1}{\sin^2}$  este același cu semnul integralei funcției sin. Semnul integralei funcției  $\frac{1}{\cos^2}$  este același cu semnul integralei funcției cos.

**Integralele unor fracții (I)**

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C, \quad a > 0, x \in I \subset \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C, \quad a > 0, x \in I \subset (-\infty, -a) \text{ sau } x \in I \subset (a, \infty)$$

**Integralele unor fracții (II)**

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \quad a > 0, x \in I \subset \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C, \quad a > 0, x \in I \subset (-a, a)$$

Pentru deosebirea integralelor de mai sus, cu integranzi destul de asemănători, este utilă următoarea regulă mnemotehnică: dacă după eliminarea termenului liber, extragerea radicalului și eliminarea modulului se obține  $\frac{1}{x}$ , atunci integrala conține ln (logaritmul natural), ca și  $\int \frac{1}{x} dx$ . Dacă după aceste operații nu se obține  $\frac{1}{x}$ , atunci nici integrala nu conține ln.

În plus, o altă regulă mnemotehnică este că în rezultatul primei integrale (cea fără radical) se împarte cu  $a$  și înăuntrul argumentului funcției  $\operatorname{arctg}$  și în afara

acestui, întrucât „se pleacă de la  $a^2$ ”. În rezultatul celei de-a doua integrale se împarte cu  $a$  doar înăuntrul argumentului funcției arcsin, nu și în afara acestuia, întrucât „se pleacă de la  $\sqrt{a^2} = a$ ”.

### Integralele unor fracții (III)

Are loc și următoarea formulă, care nu se conformează însă regulii mnemotehnice de mai sus

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C, \quad a > 0, x \in I, \text{ unde}$$

$$I \subset (-\infty, -a) \text{ sau } I \subset (-a, a) \text{ sau } I \subset (a, \infty).$$

Oricum, integralele de acest tip pot fi calculate relativ ușor ca aplicație a operațiilor cu funcții care admit primitive, insistența asupra încă unei formule de calcul separate pentru acest caz, neconformă cu celelalte, nefiind neapărat necesară.

## 1.2 Operații cu funcții care admit primitive

**Teorema 1.2.** Fie  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f, g$  admit primitive pe  $I$  și  $c \in \mathbb{R}$ ,  $c \neq 0$ . Au loc următoarele proprietăți.

1. Funcțiile  $f + g$  și  $f - g$  admit primitive pe  $I$ , iar

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

(integrala sumei este egală cu suma integralelor), respectiv

$$\int (f(x) - g(x)) dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$$

(integrala diferenței este egală cu diferența integralelor).

2. Funcția  $cf$  admite primitive pe  $I$ , iar

$$\int cf(x) dx = c \int f(x) dx,$$

(o constantă nenulă cu care se înmulțește poate fi trecută de sub integrală înaintea integralei).

Menționăm că nu au loc formule asemănătoare pentru produs și raport, adică integrala produsului nu este, de regulă, produsul integralelor și nici integrala raportului nu este, de regulă, raportul integralelor. Condensat, formulele de mai sus pot fi scrise sub forma următoare.

**Teorema 1.3.** Fie  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f, g$  admit primitive pe  $I$  și  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ,  $c_1, c_2 \neq 0$ . Atunci  $c_1f + c_2g$  admite primitive pe  $I$  și

$$\int (c_1f(x) + c_2g(x))dx = c_1 \int f(x)dx + c_2 \int g(x)dx$$

**Exemplu.**

$$\begin{aligned} \int \left( \frac{3}{x^2 + 16} + \frac{5}{\sqrt{x^2 + 19}} \right) dx &= 3 \int \frac{1}{x^2 + 16} dx + 5 \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 19}} dx \\ &= \frac{3}{4} \operatorname{arctg} \frac{x}{4} + 5 \ln (x + \sqrt{x^2 + 19}). \end{aligned}$$

**Exemplu.** Fie  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ . Atunci

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 - a^2} dx &= \int \frac{1}{(x - a)(x + a)} dx = \frac{1}{2a} \int \frac{2a}{(x - a)(x + a)} dx \\ &= \frac{1}{2a} \int \frac{(x + a) - (x - a)}{(x - a)(x + a)} dx = \frac{1}{2a} \left( \int \frac{1}{x - a} dx - \int \frac{1}{x + a} dx \right) \\ &= \frac{1}{2a} (\ln |x - a| - \ln |x + a|) + C = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C. \end{aligned}$$

## 1.3 Metode de calcul

S-a observat anterior că integrala produsului nu este, de regulă, produsul integralelor. Pentru calculul integralei unui produs, și în câteva alte situații, se poate aplica metoda descrisă mai jos.

### 1.3.1 Metoda de integrare prin părți

**Teorema 1.4.** Fie  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile, cu  $f', g'$  continue. Atunci  $f'g$  și  $fg'$

admit primitive pe  $I$ , iar

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx.$$

**Demonstrație.** Întrucât  $f'g$  și  $fg'$  sunt continue, ca produse de funcții continue, ele admit primitive. Să observăm că

$$(fg)' = f'g + fg',$$

conform formulei de derivare a unui produs de funcții, și atunci

$$\begin{aligned} \int [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)] dx &= \int (fg)'(x)dx \\ \implies \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx &= (fg)(x) + C \\ \implies \int f'(x)g(x)dx &= f(x)g(x) + C - \int f(x)g'(x)dx \\ \implies \int f'(x)g(x)dx &= f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx. \end{aligned}$$

■

Întrucât metoda de integrare prin părți nu reprezintă o metodă de calcul explicit al unei integrale, ci doar o formă de exprimare a unei integrale printr-o alta, ea se poate aplica doar atunci când integrala rezultată are o formă mai simplă decât integrala inițială.

Practic, trebuie mai întâi identificată sub integrală funcția care se poate scrie ca o derivată ( $f'$ ; implicit, trebuie determinat și  $f$ ). În membrul drept, ca rezultat, mai întâi se elimină integrala, derivata și  $dx$  și se scriu doar funcțiile rămase, iar apoi se mută semnul de derivare de la una dintre funcții la funcția cealaltă.

**Exemplu.** 1. Fie integrala

$$\int xe^x dx.$$

Întrucât  $x$  este o funcție polinomială, încercăm să scriem **cealaltă** funcție de sub integrală ca o derivată (procedând invers am obține după aplicarea formulei de integrare prin părți o funcție polinomială de grad mai mare decât cea inițială). Cum  $e^x$  se poate scrie ca o derivată sub forma

$(e^x)' = e^x$ , urmează că

$$\begin{aligned}\int x e^x dx &= \int x(e^x)' dx = x e^x - \int (x)' e^x dx = x e^x - \int e^x dx \\ &= x e^x - e^x + C = e^x(x - 1) + C.\end{aligned}$$

2. Fie integrala

$$\int \ln x dx, x \in (0, \infty).$$

Întrucât  $\ln x$  este o funcție inversă, mai greu de scris direct ca o derivată, încercăm să scriem **cealaltă** funcție de sub integrală (adică funcția constantă 1) ca o derivată. Cum 1 se poate scrie ca o derivată sub forma  $1 = x'$ , obținem că

$$\begin{aligned}\int \ln x dx &= \int x' \ln x dx = x \ln x - \int x(\ln x)' dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C.\end{aligned}$$

### 1.3.2 Prima metodă de schimbare de variabilă

**Teorema 1.5.** Fie  $I, J$  intervale și  $I \xrightarrow{u} J \xrightarrow{f} \mathbb{R}$  funcții care satisfac următoarele proprietăți

1.  $u$  este derivabilă cu derivata continuă pe  $I$ ;
2.  $f$  admite primitive pe  $J$ ;

Atunci  $(f \circ u)u'$  admite primitive pe  $I$ , iar

$$\int (f \circ u)(x)u'(x)dx = (F \circ u)(x) + C,$$

unde  $F$  este o primitivă a lui  $f$ .

**Demonstrație.** Deoarece  $F$  este o primitivă a lui  $f$ , urmează că  $F$  este derivabilă, iar  $F' = f$ . Atunci funcția compusă  $F \circ u$  este derivabilă, fiind compunerea a două funcții derivabile, iar

$$(F \circ u)'(x) = F'(u(x))u'(x) = f(u(x))u'(x) = (f \circ u)(x)u'(x), \quad (\forall) x \in I,$$

conform formulei de derivare a funcției compuse. Din această egalitate rezultă că  $(f \circ u)u'$  admite primitive pe  $I$ , iar o primitivă a sa este  $F \circ u$ , de unde concluzia. ■

Pentru aplicarea acestei metode, trebuie mai întâi identificată **corect** schimbarea de variabilă. În acest scop, se pune mai întâi în evidență sub semnul integral derivata unei funcții (la nivelul lui  $dx$ , nu la numitor, exponent, ș.a.m.d.) și se observă dacă acea funcție „se repetă”. Dacă se întâmplă acest lucru, funcția respectivă poate fi noua variabilă  $u$ .

**Exemple.** 1. Fie integrala

$$I_1 = \int \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx.$$

Cum  $\cos x$  se scrie ca o derivată sub forma  $\cos x = (\sin x)'$ , urmează că

$$\int \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx = \int \frac{(\sin x)'}{1 + \sin^2 x} dx,$$

observându-se că  $\sin x$  se repetă sub integrală. Notăm  $u = \sin x$ . Atunci

$$du = (\sin x)' dx = \cos x dx.$$

Asociem integralei inițiale integrala

$$J_1 = \int \frac{1}{1 + u^2} du,$$

obținută prin înlocuirea lui  $u$  și  $du$  (aceasta corespunde determinării lui  $F$  din enunțul teoremei). Cum  $J_1 = \arctg u + \mathcal{C}$  (adică  $F(u) = \arctg u$ ), revenind la variabila inițială prin înlocuire (calculând explicit  $(F \circ u)(x)$ ) urmează că

$$I_1 = \arctg(\sin x) + \mathcal{C}.$$

În cele de mai sus, „asocierea” se face datorită faptului că  $I_1$  și  $J_1$  prezintă mulțimi de funcții depinzând de variabile distincte ( $x$ , respectiv  $u$ ), posibil definite pe intervale diferite, neputând fi pus semnul de egalitate între  $I_1$  și  $J_1$ . Reamintim că două funcții sunt egale dacă și numai dacă au același domeniu, același codomeniu și realizează o asociere identică, adică asociază fiecărui element din domeniul comun un același element din codomeniu.

### Polinoame de gradul 1 ca variabile noi

O aplicație imediată este faptul că schimbarea de variabilă  $u = ax + b$ ,  $a \neq 0$ , poate fi folosită ori de câte ori este nevoie. Într-adevăr, fie integrala

$$\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a} \int f(ax + b) \cdot adx.$$

Cum  $a$  se scrie ca o derivată sub forma  $a = (ax + b)'$ , urmează că

$$\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a} \int f(ax + b)(ax + b)'dx,$$

observându-se că  $ax + b$  se repetă sub integrală. Notăm  $u = ax + b$ . Atunci

$$du = (ax + b)'dx = adx.$$

Asociem integralei inițiale integrala

$$\frac{1}{a} \int f(u)du = \frac{1}{a} F(u) + C$$

unde  $F$  este o primitivă a lui  $f$ . Înlocuind  $u$ , obținem

$$\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C.$$

Urmează că **formulele precizând integralele funcțiilor uzuale rămân valabile și în cazul în care  $x$  este înlocuit cu un termen de gradul 1 în  $x$ , împărțind însă rezultatul final prin coeficientul lui  $x$** . De exemplu, deoarece

$$\int e^x dx = e^x + C, \quad \int \cos x dx = \sin x + C,$$

urmează că

$$\int e^{2x+1} dx = \frac{1}{2} e^{2x+1} + C, \quad \int \cos(4x + 2) dx = \frac{1}{4} \sin(4x + 2) + C.$$

### Integralele unor funcții hiperbolice

Reamintim definițiile următoarelor funcții hiperbolice

$$\begin{aligned} \text{sh} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & \text{sh } x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} & (\text{sinus hiperbolic}) \\ \text{ch} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & \text{ch } x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} & (\text{cosinus hiperbolic}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{th} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & \operatorname{th} x &= \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} && \text{(tangenta hiperbolică)} \\ \operatorname{cth} : \mathbb{R}^* &\rightarrow \mathbb{R}, & \operatorname{cth} x &= \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} && \text{(cotangenta hiperbolică),} \end{aligned}$$

împreună cu identitatea fundamentală

$$(\operatorname{ch} x)^2 - (\operatorname{sh} x)^2 = 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Atunci

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sh} x dx &= \operatorname{ch} x + \mathcal{C}, & x &\in \mathbb{R}, \\ \int \operatorname{ch} x dx &= \operatorname{sh} x + \mathcal{C}, & x &\in \mathbb{R}, \\ \int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} dx &= \operatorname{th} x + \mathcal{C}, & x &\in \mathbb{R}, \\ \int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} dx &= -\operatorname{cth} x + \mathcal{C}, & x &\in I \subset (-\infty, 0) \text{ sau } x \in I \subset (0, \infty). \end{aligned}$$

Într-adevăr,

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sh} x dx &= \int \frac{e^x - e^{-x}}{2} dx = \frac{1}{2} \int (e^x - e^{-x}) dx = \frac{1}{2} \left( \int e^x dx - \int e^{-x} dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( e^x - \frac{e^{-x}}{-1} \right) + \mathcal{C} = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) + \mathcal{C} = \operatorname{ch} x + \mathcal{C}, \end{aligned}$$

similar calculându-se cea de-a doua integrală. De asemenea,

$$(\operatorname{th} x)' = \left( \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \right)' = \frac{(\operatorname{sh} x)' \operatorname{ch} x - (\operatorname{ch} x)' \operatorname{sh} x}{(\operatorname{ch} x)^2} = \frac{(\operatorname{ch} x)^2 - (\operatorname{sh} x)^2}{(\operatorname{ch} x)^2} = \frac{1}{(\operatorname{ch} x)^2},$$

de unde

$$\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \operatorname{th} x + \mathcal{C},$$

cea de-a patra formulă obținându-se asemănător. Remarcăm faptul că formulele de integrare pentru funcții hiperbolice sunt asemănătoare celor pentru funcțiile trigonometrice corespunzătoare, cu excepția absenței semnului  $-$  pentru  $\int \operatorname{sh} x dx$ .

### 1.3.3 A doua metodă de schimbare de variabilă

Din punct de vedere practic, prima metodă de schimbare de variabilă se folosește atunci când sub integrală se poate pune în evidență derivata unei funcții care, de asemenea, „se repetă” (integrandul poate fi scris în funcție de aceasta). Există multe situații în care se poate face o schimbare de variabilă plauzibilă, chiar dacă nu poate fi pusă în evidență sub integrală derivata acestei schimbări de variabilă, sau cel puțin nu la nivelul lui  $dx$ . Un exemplu este integrala

$$\int \frac{1}{1+e^x} dx, \quad x \in (0, \infty),$$

în care schimbarea de variabilă  $u = e^x$  este plauzibilă, deși  $u' = e^x$  nu poate fi pus în evidență la nivelul lui  $dx$ . Această situație este tratată cu ajutorul următoarei teoreme, în care integrandul este  $f \circ u$ , nu  $(f \circ u)u'$ , ca în prima metodă de schimbare de variabilă.

**Teorema 1.6.** Fie  $I, J$  intervale și  $I \xrightarrow{u} J \xrightarrow{f} \mathbb{R}$  funcții care satisfac următoarele proprietăți

1.  $u$  este derivabilă și inversabilă, iar  $u^{-1}$  este derivabilă cu derivata continuă pe  $J$ ;
2.  $f \cdot (u^{-1})'$  admite primitive pe  $J$ ;

Atunci  $(f \circ u)$  admite primitive pe  $I$ , iar

$$\int (f \circ u)(x) dx = (F \circ u)(x) + C,$$

unde  $F$  este o primitivă a lui  $f \cdot (u^{-1})'$ .

**Exemplu.** Fie integrala

$$\int \frac{1}{1+e^x} dx, \quad x \in (0, \infty),$$

Schimbarea de variabilă, plauzibilă din context, este  $u = e^x$ , unde

$$u : (0, \infty) \rightarrow (1, \infty), \quad u(x) = e^x$$

este derivabilă și inversabilă, inversa sa,

$$u^{-1} : (1, \infty) \rightarrow (0, \infty), \quad u^{-1}(y) = \ln y$$

fiind de asemenea derivabilă, cu  $(u^{-1})'$  continuă pe  $(1, \infty)$ , deoarece

$$(u^{-1})'(y) = \frac{1}{y}, \quad y \in (1, \infty).$$

Atunci

$$u = e^x \implies x = \ln u$$

(această etapă reprezintă inversarea lui  $u$ ), de unde

$$dx = (\ln u)' du = \frac{1}{u} du,$$

(această etapă include calculul lui  $(u^{-1})'$ ). Asociem integrala, obținută prin înlocuirea lui  $e^x$  și  $dx$ ,

$$J = \int \frac{1}{1+u} \cdot \frac{1}{u} du$$

(acum se calculează o primitivă pentru  $f \cdot (u^{-1})'$ ). Atunci

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{1}{1+u} \cdot \frac{1}{u} du = \int \frac{1}{u(1+u)} du = \int \frac{1+u-u}{u(1+u)} du \\ &= \int \frac{1+u}{u(1+u)} du - \int \frac{u}{u(1+u)} du = \int \frac{1}{u} du - \int \frac{1}{1+u} du \\ &= \ln |u| - \ln |1+u| + C = \ln \left| \frac{u}{1+u} \right| + C \end{aligned}$$

(s-a determinat o primitivă  $F$  a lui  $f \cdot (u^{-1})'$ ). Prin înlocuirea lui  $u$  (acum se calculează  $F \circ u$ ), urmează că integrala inițială este

$$I = \ln \left| \frac{e^x}{1+e^x} \right| + C = \ln \left( \frac{e^x}{1+e^x} \right) + C.$$

## 1.4 Integrarea funcțiilor raționale

**Definiție.** Numim **funcție rațională** o funcție  $f$  care se poate scrie sub forma (similară unui număr rațional)

$$f = \frac{P}{Q},$$

unde  $P, Q$  sunt funcții polinomiale.

Să observăm că denumirea de funcție rațională are legătură cu forma de raport a funcției, nefiind necesar ca  $P, Q$  să aibă coeficienți raționali. Astfel,

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^2 - \sqrt{2}x + \sqrt{3}}{x^2 + \sqrt{3}x + \sqrt{7}}$$

este o funcție rațională, deși coeficienții  $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{7}$  nu sunt numere raționale.

### Descompunerea unei funcții raționale

În cele ce urmează, vom preciza un mod general de calcul al primitivelor unei funcții raționale. În fapt, calculul unei integrale de forma

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

se poate reduce la calculul mai multor integrale mai simple, ținând cont de următoarele observații.

1. Dacă  $\text{grad } P \geq \text{grad } Q$ , se poate face mai întâi împărțirea cu rest a numărătorului la numitor. Se înlocuiește apoi numărătorul cu expresia sa furnizată de această împărțire cu rest, iar apoi se separă integrala inițială în două integrale, una corespunzătoare câtului și împărțitorului, iar cealaltă restului.
2. Dacă numitorul nu este „elementar” (puterea unei funcții polinomiale care nu se descompune mai departe), atunci, după descompunerea lui  $Q$ , funcția de integrat  $\frac{P}{Q}$  se poate scrie ca suma unor fracții cu numitori mai simpli. În acest sens, orice funcție polinomială  $Q$  se poate descompune ca un produs de funcții polinomiale de forma
  - $(x - a)^p$  (puteri ale unor funcții polinomiale de gradul 1)
  - $(x^2 + bx + c)^p$ , cu  $\Delta = b^2 - 4c < 0$  (puteri ale unor funcții polinomiale de gradul 2 care nu se descompun mai departe),

înmulțite eventual cu o constantă.

**Exemplu.** Fie integrala

$$\int \frac{x^4}{x+1} dx.$$

Cum gradul numărătorului este 4 iar cel al numitorului este 1, împărțim mai întâi cu rest numărătorul la numitor, obținând relația

$$x^4 = (x+1)(x^3 - x^2 + x - 1) + 1.$$

Atunci

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4}{x+1} dx &= \int \frac{(x+1)(x^3 - x^2 + x - 1) + 1}{(x+1)} dx \\ &= \int \frac{(x+1)(x^3 - x^2 + x - 1)}{(x+1)} dx + \int \frac{1}{x+1} dx \\ &= \int (x^3 - x^2 + x - 1) dx + \ln|x+1| + C \\ &= \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + C. \end{aligned}$$

Pentru descompunerea în fracții mai simple, ținem seamă că

- Numărătorii vor fi căutați de grad **cu o unitate mai mic** decât gradul elementului principal de la numitor.
- Descompunerea nu „face salturi”, în sensul că odată cu o putere a unui element principal pentru descompunere sunt necesare și puterile intermediare, chiar dacă acestea nu apar în mod explicit de la început.

Astfel, un exemplu de descompunere este

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}.$$

Elementele principale de la numitorul fracției inițiale sunt  $x+1$  și  $x+2$  (de gradul 1), numărătorii care le corespund fiind de gradul 0 (constante).

De asemenea, un alt exemplu de descompunere este

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+2x+6)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+6} + \frac{Dx+E}{(x^2+2x+6)^2} + \frac{Fx+G}{(x^2+2x+6)^3}.$$

Elementele principale de la numitorul fracției inițiale sunt

- $x + 1$  (de gradul 1);
- $x^2 + 2x + 6$  (de gradul 2, care nu se descompune mai departe întrucât  $\Delta = -20 < 0$ ).

Numărătorii care le corespund sunt de gradul 0 (constante), respectiv de gradul 1. În descompunere, odată cu puterea 3 (cea care apare explicit) apar și puterile intermediare 1 și 2.

### Metode de determinare a coeficienților

1. Aducerea la același numitor, identificarea coeficienților și rezolvarea unui sistem.
2. Înmulțirea cu puterile cele mai mari ale elementelor principale de la numitor.
3. (În unele situații particulare) Scrierea numărătorului cu ajutorul diferenței unor factori de la numitor

**Exemplu.** Fie integrala

$$\int \frac{1}{x^2 + 3x + 2} dx.$$

Numitorul fracției este funcția polinomială de gradul al doilea  $x^2 + 3x + 2$ . Întrucât  $\Delta = 9 - 8 > 0$ , aceasta se descompune mai departe. Rezolvând ecuația  $x^2 + 3x + 2 = 0$ , obținem rădăcinile  $x_1 = -1$  și  $x_2 = -2$ , și atunci  $x^2 + 3x + 2$  se descompune sub forma

$$x^2 + 3x + 2 = 1(x - (-1))(x - (-2)) = (x + 1)(x + 2),$$

deci

$$\int \frac{1}{x^2 + 3x + 2} dx = \int \frac{1}{(x + 1)(x + 2)} dx.$$

Integrandul se descompune sub forma

$$\frac{1}{(x + 1)(x + 2)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x + 2}.$$

Rămâne deci să determinăm  $A$  și  $B$ . Prin amplificare și aducere la același

numitor obținem

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x+1)(x+2)} &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2) + B(x+1)}{(x+1)(x+2)} \\ &= \frac{x(A+B) + (2A+B)}{(x+1)(x+2)}\end{aligned}$$

Întrucât două fracții echivalente cu numitorii egali au și numărătorii egali, obținem de aici

$$1 = x(A+B) + (2A+B),$$

pentru orice  $x$  din domeniul de integrare. Prin identificarea coeficienților, obținem că

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A+B=1, \end{cases}$$

sistem cu soluția  $A=1$ ,  $B=-1$ . Înlocuind aceste valori acolo unde  $A$  și  $B$  au apărut pentru prima dată obținem descompunerea

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}.$$

De aici,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx &= \int \left( \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \int \frac{1}{x+1} dx - \int \frac{1}{x+2} dx \\ &= \ln|x+1| - \ln|x+2| + C = \ln \left| \frac{x+1}{x+2} \right| + C.\end{aligned}$$

**Exemplu.** Fie integrala

$$\int \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} dx.$$

Integrandul se descompune sub forma

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}. \quad (1.1)$$

Rămâne deci să determinăm  $A$ ,  $B$  și  $C$ .

Înmulțind (1.1) cu primul numitor,  $x + 1$ , obținem că

$$\frac{1}{(x+2)(x+3)} = A + \frac{B(x+1)}{x+2} + \frac{C(x+1)}{x+3},$$

de unde, pentru  $x = -1$  (valoare care anulează factorul cu care s-a înmulțit) se obține că

$$\frac{1}{2} = A.$$

Înmulțind (1.1) cu al doilea numitor,  $x + 2$ , obținem că

$$\frac{1}{(x+1)(x+3)} = \frac{A(x+2)}{x+1} + B + \frac{C(x+2)}{x+3},$$

de unde, pentru  $x = -2$  (valoare care anulează factorul cu care s-a înmulțit) se obține că

$$-1 = B.$$

Înmulțind (1.1) cu al treilea numitor,  $x + 3$ , obținem că

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A(x+3)}{x+1} + \frac{B(x+3)}{x+2} + C,$$

de unde, pentru  $x = -3$  (valoare care anulează factorul cu care s-a înmulțit) se obține că

$$\frac{1}{2} = C.$$

Înlocuind aceste valori acolo unde  $A$ ,  $B$  și  $C$  au apărut pentru prima dată obținem descompunerea

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+3}.$$

De aici,

$$\int \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} dx = \int \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+3} \right) dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx - \int \frac{1}{x+2} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+3} dx \\
&= \frac{1}{2} \ln|x+1| - \ln|x+2| + \frac{1}{2} \ln|x+3| + C \\
&= \frac{1}{2} \ln \left( \frac{|(x+1)(x+3)|}{|x+2|^2} \right) + C.
\end{aligned}$$

**Exemplu.** Fie integrala

$$\int \frac{1}{(x^2+2)(x^2+4)} dx.$$

Cum

$$(x^2+4) - (x^2+2) = 2,$$

putem scrie

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x^2+2)(x^2+4)} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2}{(x^2+2)(x^2+4)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(x^2+4) - (x^2+2)}{(x^2+2)(x^2+4)} dx \\
&= \frac{1}{2} \left( \int \frac{x^2+4}{(x^2+2)(x^2+4)} dx - \int \frac{x^2+2}{(x^2+2)(x^2+4)} dx \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( \int \frac{1}{x^2+2} dx - \int \frac{1}{x^2+4} dx \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \right) + C
\end{aligned}$$

## 1.5 Integrale reductibile la integralele unor funcții raționale

Vom prezenta un număr de situații tip în care calculul integralei unor funcții aparent mai complicate se reduce la calculul integralelor unor funcții raționale după schimbări de variabile potrivite. În cele ce urmează, prin  $R$  vom înțelege o funcție rațională oarecare.

**Integrale conținând exponențiale**

$$\int R(a^x) dx$$

Se poate folosi schimbarea de variabilă  $u = a^x$  (se alege exponențiala ca variabilă nouă).

**Exemplu.** Fie integrala

$$I = \int \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx.$$

Întrucât  $e^{2x} = (e^x)^2$ , putem scrie

$$\int \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx = \int \frac{e^x}{1 + (e^x)^2} dx.$$

Alegând variabila nouă  $u = e^x$ , urmează că

$$du = (e^x)' dx = e^x dx.$$

Asociem integralei inițiale integrala

$$J = \int \frac{1}{1 + u^2} du,$$

obținută prin înlocuirea lui  $du$  și  $u$  (în această ordine). Cum  $J = \operatorname{arctg} u + C$ , obținem prin înlocuirea lui  $u$  că

$$I = \operatorname{arctg}(e^x) + C.$$

### Integrale conținând radicalul unei funcții polinomiale de gradul 1

$$\int R(\sqrt[n]{ax + b}) dx$$

Se poate folosi schimbarea de variabilă  $u = \sqrt[n]{ax + b}$  (se alege radicalul ca variabilă nouă). Pasul următor este ridicarea la putere, pentru eliminarea radicalului.

**Exemplu.** Fie integrala

$$I = \int \sqrt[5]{2x + 1} dx.$$

Alegând variabila nouă  $u = \sqrt[5]{2x + 1}$ , urmează că

$$u^5 = 2x + 1 \implies x = \frac{u^5 - 1}{2} \implies dx = \left( \frac{u^5 - 1}{2} \right)' du = \frac{5}{2} u^4 du.$$

Asociem integralei inițiale integrala

$$J = \int u \cdot \frac{5}{2} u^4 du,$$

obținută prin înlocuirea lui  $du$  și  $u$ . Cum

$$J = \int \frac{5}{2} u^5 du = \frac{5}{2} \int u^5 du = \frac{5}{2} \cdot \frac{u^6}{6} + C = \frac{5}{12} u^6 + C,$$

obținem prin înlocuirea lui  $u$  că

$$I = \frac{5}{12} (\sqrt[5]{2x+1})^6 + C.$$

**Integrale conținând mai mulți radicali de ordine diferite ai unei aceleiași expresii de gradul 1**

$$\int R(\sqrt[n_1]{ax+b}, \sqrt[n_2]{ax+b}, \dots, \sqrt[n_k]{ax+b}) dx$$

Se poate folosi schimbarea de variabilă  $u = \sqrt[n]{ax+b}$ , unde  $n$  este cel mai mic multiplu comun al radicalilor existenți. Pasul următor este ridicarea la putere, pentru eliminarea radicalului. Calculele sunt similare celor de mai sus.

**Integrale conținând radicalul unui raport de funcții polinomiale de gradul 1**

$$\int R\left(\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$$

Se poate folosi schimbarea de variabilă  $u = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$  (se alege radicalul ca variabilă nouă). Pasul următor este ridicarea la putere, pentru eliminarea radicalului. Calculele sunt similare celor de mai sus.

**Integrale conținând radicalul unei funcții polinomiale de gradul 2 la numitor**

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$$

Se poate reduce la una dintre integralele uzuale după aducerea trinomului de gradul al doilea  $ax^2+bx+c$  la forma canonică (punând în evidență pătrate perfecte).

**Exemplu.** Fie integrala

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x^2 - 3x + 1}} dx$$

Deoarece

$$\begin{aligned} 2x^2 - 3x + 1 &= 2 \left( x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \right) = 2 \left[ \left( x - \frac{3}{4} \right)^2 - \frac{9}{16} + \frac{1}{2} \right] \\ &= 2 \left[ \left( x - \frac{3}{4} \right)^2 - \frac{1}{16} \right], \end{aligned}$$

urmează că

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x^2 - 3x + 1}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{2 \left[ \left( x - \frac{3}{4} \right)^2 - \frac{1}{16} \right]}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{\left( x - \frac{3}{4} \right)^2 - \frac{1}{16}}} dx$$

Cu schimbarea de variabilă  $u = x - \frac{3}{4}$ , obținem

$$du = \left( x - \frac{3}{4} \right)' dx = dx.$$

Asociem integrala

$$J = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{u^2 - \frac{1}{16}}} du = \ln \left| u + \sqrt{u^2 - \frac{1}{16}} \right| + C.$$

Atunci, prin înlocuirea lui  $u$ , obținem că

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x^2 - 3x + 1}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \left( x - \frac{3}{4} \right) + \sqrt{\left( x - \frac{3}{4} \right)^2 - \frac{1}{16}} \right| + C.$$

### Integrale conținând radicalul unei funcții polinomiale de gradul 2

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx$$

Se poate calcula utilizând metoda de integrare prin părți. În acest sens, să notăm

$$I = \int \sqrt{x^2 + a^2} dx.$$

Observăm că

$$\begin{aligned} I &= \int x' \sqrt{x^2 + a^2} dx = x \sqrt{x^2 + a^2} - \int x(\sqrt{x^2 + a^2})' dx \\ &= x \sqrt{x^2 + a^2} - \int x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = x \sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx \end{aligned}$$

Întrucât numărătorul,  $x^2$ , este asemănător cu expresia de la numitor,  $x^2 + a^2$ , exploatăm această asemănare scriind numărătorul sub forma

$$x^2 = x^2 + a^2 - a^2.$$

Atunci

$$\begin{aligned} I &= x \sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{x^2 + a^2 - a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = x \sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{x^2 + a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx + \int \frac{a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx \\ &= x \sqrt{x^2 + a^2} - \int \sqrt{x^2 + a^2} dx + a^2 \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx \\ &= x \sqrt{x^2 + a^2} - I + a^2 \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C \end{aligned}$$

De aici,

$$\begin{aligned} 2I &= x \sqrt{x^2 + a^2} + a^2 \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C \\ \implies I &= \frac{1}{2} [x \sqrt{x^2 + a^2} + a^2 \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})] + C \end{aligned}$$

În mod asemănător se pot calcula și integralele  $\int \sqrt{x^2 - a^2} dx$ ,  $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ .

$$\int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx$$

După aducerea la forma canonică (formarea de pătrate perfecte), problema se reduce la calculul uneia din integralele de mai sus.

**Integrale conținând radicalul unei funcții polinomiale de gradul 2 într-un cadru general**

$$\int R(\sqrt{ax^2 + bx + c}) dx, \quad a \neq 0$$

Se pot folosi schimbările de variabilă

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t + x\sqrt{a}, \quad \text{dacă } a > 0$$

$$\begin{aligned}\sqrt{ax^2 + bx + c} &= tx + \sqrt{c}, & \text{dacă } c \geq 0 \\ \sqrt{ax^2 + bx + c} &= t(x - x_1), & \text{dacă } \Delta \geq 0\end{aligned}$$

$x_1$  fiind o rădăcină a ecuației  $ax^2 + bx + c = 0$ . Aceste schimbări de variabilă se mai numesc și **substituțiile lui Euler**. Cele trei cazuri nu se exclud unul pe celălalt, existând situații în care pot fi utilizate toate cele trei schimbări de variabilă.

**Exemplu.** Fie integrala

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 3x + 2}} dx.$$

Pot fi aplicate toate cele trei schimbări de variabilă, deoarece  $a = 1 > 0$ ,  $c = 2 > 0$ , iar  $\Delta = 1 > 0$ . Va fi folosită prima dintre ele,

$$\sqrt{x^2 - 3x + 2} = t + x.$$

Atunci, după ridicare la pătrat,

$$x^2 - 3x + 2 = t^2 + 2tx + x^2 \implies 2 - t^2 = x(2t + 3) \implies x = \frac{2 - t^2}{2t + 3},$$

de unde

$$dx = \left( \frac{2 - t^2}{2t + 3} \right)' dt = (-2) \frac{t^2 + 3t + 2}{(2t + 3)^2} dt.$$

Asociem integrala

$$\begin{aligned}J &= \int \frac{1}{\frac{2-t^2}{2t+3} \left( t + \frac{2-t^2}{2t+3} \right)} \cdot (-2) \frac{t^2 + 3t + 2}{(2t + 3)^2} dt \\ &= \int \frac{1}{\frac{2-t^2}{2t+3} \cdot \frac{t^2+3t+2}{2t+3}} \cdot (-2) \frac{t^2 + 3t + 2}{(2t + 3)^2} dt \\ &= \int \frac{-2}{2 - t^2} dt = 2 \int \frac{1}{t^2 - 2} dt = 2 \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t - \sqrt{2}}{t + \sqrt{2}} \right| + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t - \sqrt{2}}{t + \sqrt{2}} \right| + C.\end{aligned}$$

Prin înlocuirea lui  $t$  cu  $\sqrt{x^2 - 3x + 2} - x$ , obținem că

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2} - x - \sqrt{2}}{\sqrt{x^2 - 3x + 2} - x + \sqrt{2}} \right| + C.$$

### Integralele unor funcții trigonometrice (I)

$$\int R(\sin x) \cos x dx, \quad \int R(\cos x) \sin x dx$$

Întrucât  $(\sin x)' = \cos x$ , iar  $(\cos x)' = -\sin x$ , integralele de mai sus au în fapt forma

$$\int R(\sin x) \cdot (\sin x)' dx, \quad \int R(\cos x) \cdot (-\cos x)' dx.$$

Se vor folosi schimbările de variabilă  $u = \sin x$ , respectiv  $u = \cos x$ .

**Exemplu.** Fie integrala

$$I = \int \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x} dx.$$

Atunci, deoarece

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x,$$

urmează că

$$I = \int \frac{2 \sin x \cos x}{1 + \sin^2 x} dx = 2 \int \frac{\sin x}{1 + \sin^2 x} \cos x dx.$$

Cu schimbarea de variabilă  $u = \sin x$  obținem

$$du = (\sin x)' dx = \cos x dx.$$

Asociem integrala

$$J = 2 \int \frac{u}{1 + u^2} du = \int \frac{2u}{1 + u^2} du = \int \frac{(1 + u^2)'}{1 + u^2} du.$$

Cu schimbarea de variabilă  $v = 1 + u^2$  obținem

$$dv = (1 + u^2)' du = 2u du.$$

Asociem integrala

$$J' = \int \frac{1}{v} dv = \ln |v| + C.$$

Atunci, prin înlocuirea lui  $v$  obținem că

$$J = \ln |1 + u^2| + C = \ln(1 + u^2) + C.$$

Prin înlocuirea lui  $u$  obținem că integrala inițială are valoarea

$$I = \ln(1 + \sin^2 x) + C.$$

### Integralele unor funcții trigonometrice (II)

$$\int \sin^m \cos^n x dx, \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

Dacă măcar una dintre puterile  $m$ ,  $n$  ale uneia din funcții este impară, **cealaltă** funcție se poate alege ca variabilă nouă.

Dacă ambele puteri sunt pare, se va trece la unghiul dublu prin folosirea formulelor

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}, \quad \sin(2x) = 2 \sin x \cos x.$$

**Exemplu.** Fie integrala

$$I = \int \sin^5 \cos^3 x dx.$$

Deoarece  $\sin x$  este ridicată la o putere impară,  $\cos x$  poate fi aleasă ca variabilă nouă. Dintr-un motiv similar, și  $\sin x$  poate fi aleasă ca variabilă nouă. Pentru fixarea ideilor, vom folosi schimbarea de variabilă  $u = \sin x$ . Atunci

$$du = (\sin x)' dx = \cos x dx.$$

Folosind identitatea trigonometrică fundamentală,  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ , obținem

$$I = \int \sin^5 x \cos^2 x \cdot \cos x dx = \int \sin^5 x (1 - \sin^2 x) \cdot \cos x dx.$$

Asociem integrala

$$J = \int u^5 (1 - u^2) du = \int (u^5 - u^7) du = \frac{u^6}{6} - \frac{u^8}{8} + C.$$

Prin înlocuirea lui  $u$  obținem că

$$I = \frac{(\sin x)^6}{6} - \frac{(\sin x)^8}{8} + C.$$

### Integralele unor funcții trigonometrice (III)

$$\int R(\sin x, \cos x) dx$$

Prin analogie cu cele de mai sus, dacă  $R$  este impară într-una din funcțiile  $\sin x$ ,  $\cos x$ , adică

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

respectiv

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

cealaltă funcție se alege ca schimbare de variabilă.

Dacă  $R$  este pară atât în  $\sin x$  cât și în  $\cos x$ , fie se trece la unghiul dublu, fie se alege ca schimbare de variabilă  $u = \operatorname{tg} x$ . Calculele sunt similare celor de mai sus.

### Integrale binome

$$\int x^m (ax^n + b)^p dx, \quad m, n, p \in \mathbb{Q}, \quad a, b \neq 0$$

Întrucât  $m, n, p$  sunt numere raționale, nu neapărat întregi, integrala de mai sus poate conține radicali de diverse forme. Dacă

$$p \in \mathbb{Z} \quad \text{sau} \quad \frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z} \quad \text{sau} \quad \frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z},$$

și numai în aceste cazuri, calculul unei integrale de forma de mai sus poate fi redus la calculul integralei unei funcții raționale. Sunt posibile următoarele situații.

1. Dacă  $p \in \mathbb{Z}$ , atunci  $x = t^q$ , unde  $q$  este numitorul comun al lui  $m$  și  $n$ . Altfel spus,  $t = \sqrt[q]{x}$ , unde  $N$  este cel mai mic multiplu comun al ordinilor radicalilor deja existenți.
2. Dacă  $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$ , atunci  $ax^n + b = t^q$ , unde  $q$  este numitorul lui  $p$ . Altfel spus,  $t = \sqrt[q]{ax^n + b}$ , adică se alege ca variabilă nouă paranteza cu tot cu exponent, eliminând eventualul numărător al exponentului și eventualul semn  $-$ .

3. Dacă  $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$ , atunci  $a + \frac{b}{x^n} = t^q$ , unde  $q$  este numitorul lui  $p$ . Altfel spus,  $t = \sqrt[n]{a + \frac{b}{x^n}}$ , adică se alege ca variabilă nouă paranteza după un factor comun forțat, cu tot cu exponent, eliminând eventualul numărator al exponentului și eventualul semn  $-$ .

Substituțiile de mai sus se numesc și **substituțiile lui Cebâșev**.

**Exemplu.** Fie integrala

$$I = \int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx, \quad x \in (0, \infty).$$

Atunci

$$I = \int x^3(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} dx \implies m=3, n=2, p=-\frac{1}{2}.$$

Observăm că  $p = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ , dar  $\frac{m+1}{n} = 2 \in \mathbb{Z}$ . Alegem ca variabilă nouă

$$t = (x^2+1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2+1},$$

eliminând semnul  $-$  de la exponent, întrucât expresia  $1+x^2$  de sub radical nu este ridicată ea însăși la o putere. De aici

$$t^2 = x^2 + 1 \implies x^2 = t^2 - 1 \implies x = \sqrt{t^2 - 1},$$

și deci

$$dx = (\sqrt{t^2-1})' dt = \frac{1}{2\sqrt{t^2-1}} \cdot (t^2-1)' dt = \frac{1}{2\sqrt{t^2-1}} \cdot 2t dt = \frac{t}{\sqrt{t^2-1}} dt.$$

Asociem integrala

$$\begin{aligned} J &= \int (\sqrt{t^2-1})^3 \cdot (t^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{t}{\sqrt{t^2-1}} dt = \int (t^2-1)\sqrt{t^2-1} \cdot \frac{1}{t} \cdot \frac{t}{\sqrt{t^2-1}} dt \\ &= \int (t^2-1) dt = \frac{t^3}{3} - t + C. \end{aligned}$$

Prin înlocuirea lui  $t$ , obținem că

$$I = \frac{(\sqrt{x^2+1})^3}{3} - \sqrt{x^2+1} + C.$$

## Aplicații

1.1. Demonstrați că

$$\left(\sqrt{x^2+1}\right)' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R},$$

și determinați  $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ .

1.2. Demonstrați că

$$\left(2\sqrt{x}(\ln x - 2)\right)' = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}, \quad \text{pentru orice } x > 0,$$

și determinați  $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ .

1.3. Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{5 + \sin x}$ . Demonstrați că orice primitivă a lui  $f$  este strict crescătoare.

1.4. Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^{-x} \cos 2x$ . Determinați  $a, b \in \mathbb{R}$  astfel încât funcția

$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = e^{-x}(a \cos 2x + b \sin 2x),$$

să fie o primitivă a lui  $f$ .

1.5. Fie  $f : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 \sin x$ . Determinați  $a, b, c \in \mathbb{R}$  astfel încât funcția

$$F : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = (ax^2 + b) \cos x + cx \sin x,$$

să fie o primitivă a lui  $f$ .

1.6. Determinați  $a, b \in \mathbb{R}$  astfel încât funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} ae^x, & x < 0 \\ \frac{\sqrt{1+x-b}}{x}, & x \geq 0 \end{cases}$

să admită primitive.

1.7. Determinați

$$1) \int \frac{1}{4x+5} dx; \quad 2) \int e^{3x+1} dx; \quad 3) \int \sin(3x+4) dx; \quad 4) \int \frac{dx}{(x+1)^4}.$$

1.8. Determinați

$$1) \int x^2 e^x dx; \quad 2) \int e^{2x} \sin(3x) dx; \quad 3) \int x \operatorname{arctg} x dx; \quad 4) \int x^2 \cos x dx;$$

$$5) \int \sin(\ln x) dx; \quad 6) \int x \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx.$$

**1.9. Determinați**

$$1) \int x e^{x^2} dx; \quad 2) \int \sqrt{\ln x} \frac{1}{x} dx; \quad 3) \int \sin^3 x \cos x dx; \quad 4) \int \frac{x}{1+x^4} dx;$$

$$5) \int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx; \quad 6) \int \frac{e^x}{e^{2x} + 4} dx; \quad 7) \int \frac{\cos \frac{1}{x}}{x^2} dx.$$

**1.10. Determinați formule de recurență pentru calculul următoarelor șiruri integrale.**

$$1) (I_n)_{n \geq 0}, I_n = \int (\ln x)^n dx; \quad 2) (I_n)_{n \geq 0}, I_n = \int x^n e^x dx \quad 3) (I_n)_{n \geq 0}, I_n = \int x^n \sin x dx.$$

**1.11. Determinați o formulă de recurență pentru termenii șirului**

$$(I_n)_{n \geq 0}, \quad I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{x^2 + 1}} dx,$$

folosind eventual faptul că

$$\frac{x^n}{\sqrt{x^2 + 1}} = x^{n-1} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = x^{n-1} \cdot (\sqrt{x^2 + 1})'.$$

$$1.12. \text{ Fie } A = \int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx; \quad B = \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx.$$

1. Calculați  $A + B$  și  $A - B$ .
2. Determinați  $A$  și  $B$ , folosind eventual 1.

$$1.13. \text{ Fie } A = \int \sin^2 x dx; \quad B = \int \cos^2 x dx.$$

1. Calculați  $A + B$  și  $B - A$ , folosind eventual formula  $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .
2. Determinați  $A$  și  $B$ , folosind eventual 1.

**1.14. Determinați primitivele următoarelor funcții raționale.**

$$1) \int \frac{7}{(x+1)^2} dx; \quad 2) \int \frac{5}{x^2 + 4x + 4} dx; \quad 3) \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}; \quad 4) \int \frac{dx}{x^2 + 3x + 6} dx;$$

$$5) \int \frac{x+4}{x^2 + 3x + 2} dx; \quad 6) \int \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx; \quad 7) \int \frac{x^4}{x^2 - 4x + 3} dx;$$

$$8) \int \frac{x+5}{x^4 - x^2} dx.$$

**1.15.** Determinați primitivele următoarelor funcții reductibile la funcții raționale.

$$1) \int \frac{e^{2x}}{e^x + 1} dx; \quad 2) \int e^{\sqrt{x}} dx; \quad 3) \int \sqrt{x} \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx; \quad 4) \int \frac{dx}{\sqrt{3-x} + \sqrt[3]{3-x}};$$

$$5) \int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{1+x}}; \quad 6) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+8}}; \quad 7) \int \sqrt{x^2-6x+8} dx;$$

$$8) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+3}}; \quad 9) \int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-3x-7}} dx.$$

**1.16.** Determinați primitivele următoarelor funcții trigonometrice

$$1) \int \sin^2 x \cos^3 x dx; \quad 2) \int \sin^3 x \cos^4 x dx; \quad 3) \int \sin^2 x \cos^2 x dx.$$

**1.17.** Determinați următoarele integrale binome

$$1) \int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}; \quad 2) \int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}.$$

**1.18.** Determinați  $\int \frac{1}{x\sqrt{1+x+x^2}} dx$ , folosind fie una dintre substituțiile lui Euler, fie faptul că

$$\frac{1}{x\sqrt{1+x+x^2}} = \frac{\frac{1}{x^2}}{\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1}} = \frac{\frac{1}{x^2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}} = -\frac{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right)'}{\sqrt{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}}.$$

**1.19.** Fie funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{e^x}, & x < 1 \\ \frac{\ln^2 x}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$ . Demonstrați că  $f$  admite primitive și determinați o primitivă a lui  $f$ .

**1.20.** Fie  $F$  o primitivă a funcției  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$ .

1. Demonstrați că  $F$  este strict crescătoare pe  $\mathbb{R}$ .

2. Demonstrați că

$$|F(x_2) - F(x_1)| \leq |x_2 - x_1|, \quad \text{pentru orice } x_1, x_2 \geq 0.$$