Concursul studențesc de matematică "TRAIAN LALESCU"
etapa locală
- 22 februarie 2013 -

Problema 1. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Demonstrați că:
a) Dacă $I+A$ este nesingulară atunci
$(I-A)(I+A)^{-1} = (I+A)^{-1}(I-A)$.
b) Dacă A este ortogonală și $I+A$ este nesingulară atunci $(I-A)(I+A)^{-1}$ este antisimetrică.
c) Dacă A este antisimetrică atunci
i) $x^TAx = 0$,
ii) $I+A$ este inversabilă și
iii) $(I-A)(I+A)^{-1}$ este ortogonală.

Problema 2. Se dă șirul $(x_n)_{n\in N}$, definit prin $x_{n+1} = 2x_n + x_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, cu $x_0 = 0$ și $x_1 = 1$.
a) Să se găsească forma termenului general al șirului.
b) Să se demonstreze că: $x_{n+1}x_{n-1} - x_n^2 = (-1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
c) Să se calculeze suma seriei

$$\sum_{n=0}^{\infty} arctg\frac{2}{x_{2n+1}}.$$

$(arctg\frac{a-b}{1+ab} = arctg\, a - arctg\, b)$

Problema 3. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
a) Este adevărată afirmația $\lambda_a\lambda_b$ este valoare proprie a lui AB, oricare ar fi $\lambda_a \in \mathbb{R}$ valoare proprie a lui A și $\lambda_b \in \mathbb{R}$ valoare proprie a lui B?
Este adevărată afirmația $\lambda_a + \lambda_b$ este valoare proprie a lui $A+B$, oricare ar fi $\lambda_a \in \mathbb{R}$ valoare proprie a lui A și $\lambda_b \in \mathbb{R}$ valoare proprie a lui B?
b) Demonstrați că λ este valoare proprie a lui AB dacă și numai dacă λ este valoare proprie a lui BA.
c) Fie $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$. Demonstrați că $\alpha_0 + \alpha_1\lambda_a + \alpha_2\lambda_a^2 + \ldots + \alpha_k\lambda_a^k$ este o valoare proprie a matricei $\alpha_0 I_n + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \ldots + \alpha_k A^k$.
d) Dacă matricea A este nesingulară atunci $\lambda_a \neq 0$ și $\frac{1}{\lambda_a}$ este o valoare proprie a lui A^{-1}.

Problema 4. Fie $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă pe $[0,\infty)$. Dacă $|f(x)| \le A$ și $|f''(x)| \le B$, pentru orice $x \in [0,\infty)$, atunci $|f'(x)| \le A + B$, pentru orice $x \in [0,\infty)$.