Concursul studenţesc de matematică "TRAIAN LALESCU"

etapa locală

Profil electric

- 22 februarie 2014 -

Problema 1. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel încât $A^2 = A, B^2 = B$. Presupunem că A şi B au acelaşi rang.

a) Să se determine valorile proprii ale matricelor A şi B.

b) Demonstraţi că A şi B sunt matrice asemenea (două matrice $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se numesc asemenea dacă există o matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\det C \neq 0$ astfel încât $A = C^{-1}BC$).

Problema 2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^2 cu proprietăţile: $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) < 0$.

a) Arătaţi că există $\delta > 0$ astfel încât

$$0 < f(x) < x, \quad \forall x \in (0, \delta).$$

b) Definim şirul (a_n) prin

$$a_1 = \frac{\delta}{2},\ a_{n+1} = f(a_n),\ \forall n \geq 1.$$

Studiaţi convergenţa seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^r,$$

unde $r \in \mathbb{R}$ este un parametru arbitrar.

Problema 3. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice cu cele n valori proprii distincte şi

$$C(A) = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) |\ A \cdot B = B \cdot A\}.$$

a) Să se arate că toate matricele din $C(A)$ au aceiaşi vectori proprii.

b) Să se demonstreze că $C(A)$ este un subspaţiu vectorial în $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Să se arate că dimensiunea subspaţiului $C(A)$ este n, iar $\{I, A, A^2, \ldots, A^{n-1}\}$ este o bază în $C(A)$.

Problema 4. Fie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^1 pentru care există $K \geq 0$ astfel încât

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right| \leq K,\ \forall x = (x_1, ..., x_n),\ \forall i = \overline{1, n}.$$

Arătaţi că pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^n$ are loc relaţia

$$|f(x) - f(y)| \leq \sqrt{n} K \left\| x - y \right\|_2,$$

unde $\|u\|_2 = \sqrt{u_1^2 + ... + u_n^2}$ reprezintă norma euclidiană a vectorului $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$.