

I. Determinați valorile limitelor

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3 + 3n + 2}{n^3 + 4n + 2} \right)^{3n^2+2} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x \operatorname{arctg}(2x)}{(5^x - 1) \ln(1 + 7x)}.$$

II. (a) Studiați convergența seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n + 3}{2n + 5} \right)^{3n^2+1}$

(b) Calculați suma seriei $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{4^n}$

III. (a) Demonstrați că ecuația $e^x(x + 2) = 4$ are cel puțin o rădăcină în intervalul $(0, 2)$.

(b) Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{1 + x^2 + \cos(x^3)}$. Calculați $f'(x)$.

(c) Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^x + x + 2, & x < 2 \\ ax + b, & x \geq 2 \end{cases}$. Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât f să fie derivabilă în $x = 2$.

(d) Calculați polinomul Taylor de ordinul 3 asociat lui $f(x) = \cos(2x + \frac{\pi}{6})$ în $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

Punctaj: I:2.25p(1.25+1), II:2p(1+1), III:4.75p(1+0.75+1.25+1.75), 1p din oficiu,

TL: 1h 30min