Matematici Aplicate, Curs 1
Ecuaţii diferenţiale

1 Noţiuni introductive

Definiţia 1.1. *Vom numi* **ecuaţie diferenţială** *o ecuaţie în care necunoscuta (numită şi* **variabila dependentă***) este o funcţie de una sau mai multe variabile independente şi în care, pe lângă funcţie, apar şi una sau mai multe derivate ale acesteia. Dacă funcţia necunoscută depinde de o singură variabilă independentă, ecuaţia obţinută se numeşte* **ecuaţie diferenţială ordinară***, în vreme ce dacă funcţia necunoscută depinde de mai multe variabile independente, ecuaţia se numeşte* **ecuaţie diferenţială cu derivate parţiale***. În ambele cazuri, ordinul maxim de derivare se numeşte* **ordinul ecuaţiei***.*

Exemplul 1.1. Ecuaţia $x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = 0$, în care x este o funcţie necunoscută care depinde de variabila reală t, este o ecuaţie diferenţială ordinară de ordinul al doilea, cu variabila dependentă x (deoarece depinde de t) şi variabila independentă t.

În schimb, ecuaţia $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0$, în care u este o funcţie necunoscută depinzând de variabilele reale independente x şi y, este o ecuaţie diferenţială cu derivate parţiale de ordinul al doilea, cu variabila dependentă u.

În cele ce urmează, pentru uşurinţă în exprimare, vom prescurta denumirea de ecuaţie diferenţială ordinară ca **ecuaţie diferenţială**, respectiv denumirea de ecuaţie diferenţială cu derivate parţiale ca **ecuaţie cu derivate parţiale**.

Adesea, necunoscuta $x = x(t)$ a unei ecuaţii diferenţiale poate reprezenta o poziţie sau deplasare de la o poziţie de echilibru ca funcţie de timp, de unde notaţia primei ecuaţii. În această situaţie, x' reprezintă viteza de deplasare, iar x'' reprezintă acceleraţia. Chiar dacă x' nu reprezintă o viteză de deplasare, ea reprezintă oricum o viteză de variaţie (a lui x), conform definiţiei derivatei.

Exemplul 1.2. O sticlă de băuturi răcoritoare proaspăt scoasă din frigider are temperatura de $4°C$. Ştiind că temperatura mediului ambiant este $T = 20°C$, precizaţi cu ajutorul unei ecuaţii diferenţiale şi a unei condiţii iniţiale evoluţia temperaturii sticlei ca funcţie de timp.

Soluţie. Notăm cu $x(t)$ temperatura sticlei la momentul t (timp măsurat începând de la momentul scoaterii sticlei din frigider, temperatură măsurată în $°C$). Deoarece viteza de încălzire a sticlei (adică viteza de variaţie a lui $x(t)$, în speţă $x'(t)$) este direct proporţională cu diferenţa de temperatură dintre sticlă şi mediul ambiant $x(t) - 20$, urmează că

$$x'(t) = -k(x(t) - 20),$$

unde k este o constantă pozitivă de proporţionalitate caracterizând transferul de căldură dintre mediu şi sticlă, semnul "-" fiind dat de faptul că deoarece temperatura sticlei este mai mică decât cea a mediului înconjurător, $x(t) - 20 < 0$, iar sticla se încălzeşte, adică $x'(t) > 0$.

De remarcat că ecuaţia obţinută descrie fenomenul fizic de răcire şi are aceeaşi formă indiferent de temperatura iniţială a sticlei. Ca atare, precizarea doar a ecuaţiei nu poate conduce la determinarea în mod unic a temperaturii sticlei la un moment dat; trebuie precizată şi temperatura ei iniţială.

Pentru situaţia problemei, acestei ecuaţii îi este adăugată condiţia $x(0) = 4$, reprezentând faptul că la momentul iniţial (al scoaterii sticlei din frigider), temperatura sticlei este $4°C$. Obţinem deci următoarea descriere

$$\begin{cases} x'(t) = -k(x(t) - 20) \\ x(0) = 4. \end{cases}$$

Definiţia 1.2. *Forma generală a unei ecuaţii diferenţiale de ordinul n este*

$$F(t, x, x', \dots, x^{(n)}) = 0, \tag{1.1}$$

F depinzând în mod explicit de $x^{(n)}$. În anumite condiţii, din această ecuaţie poate fi determinat $x^{(n)}$ (pas premergător rezolvării ecuaţiei în special pentru ecuaţiile de ordinul 1*), obţinându-se o ecuaţie de tipul*

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}), \tag{1.2}$$

numită **forma normală** *a ecuaţiei* (1.1).

Exemplul 1.3. Ecuaţia $(1 + t^2)x' - 2tx = 0$ nu este sub forma normală, însă poate fi adusă prin calcul algebric la forma normală $x' = \frac{2t}{1+t^2}x$, utilă pentru încadrarea şi rezolvarea ei.

Definiţia 1.3 (Noţiunea de soluţie)**.** *Vom spune că funcţia $x = \varphi(t)$, $\varphi : I \to \mathbb{R}$ este* **soluţie** *a ecuaţiei diferenţiale de ordinul n*

$$F(t, x, x', \dots, x^{(n)}) = 0$$

pe intervalul I dacă $\varphi \in C^n(I)$ (adică toate derivatele care intervin în ecuaţie sunt continue), iar prin înlocuirea lui x cu φ ecuaţia ramâne identic satisfăcută.

Trebuie observat că soluţiiile unei ecuaţii diferenţiale date nu sunt, de regulă, unice (vezi şi Exemplul 1.2). De exemplu, atât $x_1(t) = e^{2t}$ cât şi $x_2(t) = 3e^{2t}$ sunt soluţii ale ecuaţiei diferenţiale $x'(t) = 2x(t)$. În fapt, se poate observa că $x(t) = Ce^{2t}$ este o soluţie a ecuaţiei de mai sus pentru orice valoare a constantei C.

Definiţia 1.4 (Tipuri de soluţii)**.** *În general, soluţia unei ecuaţii diferenţiale de ordinul n depinde de n constante, scriindu-se sub forma $x = x(t, C_1, C_2, \dots, C_n)$, exprimare care reprezintă* **soluţia generală** *a ecuaţiei. Prin particularizarea constantelor se obţin* **soluţii particulare** *ale ecuaţiei. Soluţiile ecuaţiei care nu se pot obţine prin particularizarea soluţiei generale, dacă acestea există, se numesc* **soluţii singulare** *ale ecuaţiei.*

Exemplul 1.4. Ecuaţia $x'(t) = 2x(t)$ are ca soluţie generală $x(t) = Ce^{2t}$, fără să aibă soluţii singulare. Ecuaţia $x' = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ are soluţia generală definită (implicit) prin $-\sqrt{1-x^2} = t + C$ şi soluţiile singulare $x(t) \equiv 1$, $x(t) \equiv -1$. Se observă faptul că acestea nu pot fi obţinute din soluţia generală pentru nicio valoare a lui C.

Definiţia 1.5 (Problema Cauchy). *Determinarea constantelor de care depinde soluţia unei ecuaţii date se poate face impunând condiţii asupra soluţiei. În acest sens, problema determinării soluţiilor ecuaţiei*

$$F(t, x, x', \ldots, x^{(n)}) = 0,$$

care sunt supuse la condiţii de forma

$$x(t_0) = x_0,\ x'(t_0) = x_1, \ldots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}$$

(sunt date valorile lui x şi ale primelor $n-1$ derivate ale sale într-un acelaşi punct t_0, în total n condiţii, suficiente pentru a determina n constante) se numeşte **problema Cauchy** *asociată ecuaţiei date, condiţiile de mai sus numindu-se* **condiţii iniţiale**.

Daca $n = 2$, iar ecuaţia reprezină legea de mişcare a unui punct material, atunci precizarea lui $x(t_0)$ şi $x'(t_0)$ înseamnă precizarea poziţiei şi vitezei punctului material într-un acelaşi moment, numit **moment iniţial**.

Definiţia 1.6 (Ecuaţii autonome sau neautonome). *O ecuaţie diferenţială de forma*

$$F(x, x', \ldots, x^{(n)}) = 0,$$

în care variabila t (variabila independentă) nu apare în mod explicit se numeşte **ecuaţie autonomă**, *în vreme ce o ecuaţie de forma*

$$F(t, x, x', \ldots, x^{(n)}) = 0,$$

în care variabila t apare în mod explicit se numeşte **ecuaţie neautonomă**.

Exemplul 1.5. Ecuaţia $x' = 2x - 3x^2$ este o ecuaţie autonomă, în vreme ce ecuaţia $x' = 3x - 4x^3 + t^2$ este o ecuaţie neautonomă. Pentru o ecuaţie autonomă, asumând că t reprezintă variabila timp, se poate considera că fenomenul care este modelat de ecuaţia diferenţială nu suferă modificări în timp.

Matematici Aplicate, Curs 2

(cu probleme de rezolvat la curs)

Ecuaţii diferenţiale (continuare)

1 Ecuaţii diferenţiale în care derivata de ordinul n este precizată

1.1 Derivata de ordinul n a funcţiei necunoscute este nulă

$$x^{(n)}(t) = 0, \quad t \in I. \tag{1.1}$$

Metoda de rezolvare

Soluţia este un polinom de ordinul $n-1$, gradul fiind cu o unitate mai mic decât ordinul derivatei. Atunci

$$x(t) = C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + \ldots + C_{n-1} t^{n-1}.$$

Dacă sunt cunoscute $x(t_0), x'(t_0), \ldots, x^{(n-1)}(t_0)$, $t_0 \in I$ (valorile funcţiei şi ale primelor $n-1$ derivate într-un punct dat t_0 sunt precizate, în total n condiţii, număr egal cu ordinul ecuaţiei), atunci, conform formulei lui Taylor (sau prin integrări succesive),

$$x(t) = x(t_0) + \frac{x'(t_0)}{1!}(t-t_0) + \frac{x''(t_0)}{2!}(t-t_0)^2 + \ldots + \frac{x^{(n-1)}(t_0)}{(n-1)!}(t-t_0)^{n-1}.$$

Exemplul 1.1. Rezolvaţi ecuaţia $x^{(3)}(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$, ştiind că $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$, $x''(0) = -1$.

Soluţie. Urmează că

$$x(t) = x(0) + \frac{x'(0)}{1!}(t-0) + \frac{x''(0)}{2!}(t-0)^2 \implies x(t) = 1 + \frac{2}{1!}t + \frac{-1}{2!}t^2$$
$$\implies x(t) = 1 + 2t - \frac{t^2}{2}.$$

Soluţie alternativă. Deoarece $x^{(3)}(t) = 0$, urmează că $x(t) = C_0 + C_1 t + C_2 t^2$ (soluţia este un polinom de gradul al doilea). Determinăm acum C_0, C_1 şi C_2. Întrucât în condiţiile iniţiale intervin x' şi x'', calculăm şi valorile acestor derivate. Avem că $x'(t) = C_1 + 2C_2 t$, $x''(t) = 2C_2$.

Deoarece $x(0) = C_0$, obţinem $C_0 = 1$. Cum $x'(0) = C_1$, deducem $C_1 = 2$. Deoarece $x''(0) = 2C_2$, obţinem $C_2 = -\frac{1}{2}$. În concluzie, $x(t) = 1 + 2t - \frac{t^2}{2}$.

Probleme propuse. Rezolvaţi următoarele ecuaţii.

1. $x'' = 0$, cu condiţiile $x(2) = 3$, $x'(2) = 1$.
2. $x^{(3)} = 0$, cu condiţiile $x(1) = 3$, $x'(1) = -1$, $x''(1) = 1$.
3. $x^{(3)} = 0$, cu condiţiile $x(0) = 1$, $x(1) = 2$, $x(2) = 9$.

1.2 Derivata de ordinul n a funcţiei necunoscute este neidentic nulă

$$x^{(n)}(t) = f(t), \quad t \in I, \qquad f : I \to \mathbb{R} \text{ continuă} \tag{1.2}$$

Metoda de rezolvare

Prin integrări succesive, se obţine

$$x(t) = C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + \ldots + C_{n-1} t^{n-1} + \frac{1}{(n-1)!} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{n-1} f(s) ds,$$

unde $t_0 \in I$ este oarecare. Dacă sunt cunoscute $x(t_0)$, $x'(t_0), \ldots, x^{(n-1)}(t_0)$, $t_0 \in I$, atunci, conform formulei lui Taylor,

$$x(t) = x(t_0) + \frac{x'(t_0)}{1!}(t-t_0) + \frac{x''(t_0)}{2!}(t-t_0)^2 + \ldots + \frac{x^{(n-1)}(t_0)}{(n-1)!}(t-t_0)^{n-1}$$
$$+ \frac{1}{(n-1)!} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{n-1} f(s) ds.$$

Observaţie. Integrala din membrul drept se calculează de obicei prin metoda integrării prin părţi.

Observaţie. Se poate observa că soluţia generală a ecuaţiei (1.2) poate fi scrisă ca suma între soluţia generală a ecuaţiei (1.1), numită **ecuaţia omogenă** (fără termen liber) ataşată şi un termen integral, care reprezintă o soluţie particulară a ecuaţiei (1.2). Această metodă de rezolvare poate fi aplicată şi pentru alte ecuaţii de formă apropiată.

Exemplul 1.2. Rezolvaţi ecuaţia $x'' = \sin t$, $t \in \mathbb{R}$, ştiind că $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

Soluţie. Urmează că

$$\begin{aligned}
x(t) &= x(0) + \frac{x'(0)}{1!}(t-0) + \frac{1}{1!}\int_0^t (t-s)\sin s ds \\
\implies x(t) &= 0 + \frac{1}{1!}t + \int_0^t (t-s)(-\cos s)' ds \\
\implies x(t) &= t + (t-s)(-\cos s)\Big|_0^t - \int_0^t (t-s)'(-\cos s) ds \\
\implies x(t) &= t + [(t-t)(-\cos t) - (t-0)(-\cos 0)] - \int_0^t \cos s ds \\
\implies x(t) &= 2t - \sin s \Big|_0^t = 2t - \sin t
\end{aligned}$$

Observaţie. De exemplu, $x'' - x' = \sin t$ **nu** este o ecuaţie de acest tip. Trebuie ca **una singură** dintre derivatele lui x să fie egală cu o funcţie dată, doar de variabila t.

Probleme propuse. Rezolvaţi ecuaţiile.

1. $x'''(t) = \frac{1}{3}e^{2t}$, cu condiţiile $x(0) = \dfrac{25}{24}$, $x'(0) = \dfrac{37}{12}$, $x''(0) = \dfrac{13}{6}$.
2. $x''(t) = -2\sin t + 3\cos t$, cu condiţiile $x(0) = -2$, $x'(0) = 3$.

2 Ecuaţii diferenţiale de ordinul 1 integrabile prin metode elementare

2.1 Ecuaţii cu variabile separabile

Sunt ecuaţii de forma

$$x' = f(t)g(x), \tag{EVS}$$

unde $f : I_1 \to \mathbb{R}$, $g : I_2 \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue, iar g nu se anulează, membrul drept putându-se scrie ca un produs intre o funcţie care depinde doar de variabila t şi o funcţie care depinde doar de variabila x.

Metoda de rezolvare a (EVS)

Se separă cele două variabile prin împărţire, într-un membru rămânând doar x' şi funcţii de variabila x iar în celălalt doar funcţii de variabila t. Se integrează în ambii membri, folosind-se şi faptul că $dx = x'dt$.

Observaţie. Atenţie la împărţire! Ea poate produce pierderea unor soluţii constante (singulare), care trebuie considerate separat.

Observaţie. De exemplu, $x' = t^2 + x^2$ **nu** este o ecuaţie de acest tip (membrul drept este o sumă, nu un produs).

De asemenea, $x' = t(t^2 + x^2)$ **nu** este o ecuaţie de acest tip (deşi membrul drept este un produs, al doilea factor este o funcţie atât de t, cât şi de x; ar fi trebuit să fie o funcţie doar de variabila x).

Nici $x'' = \sin t \cos x$ **nu** este o ecuaţie de acest tip (deşi membrul drept se separă în modul dorit, ecuaţia este de ordinul al doilea, nu de ordinul întâi.

Exemplul 2.1. Rezolvaţi ecuaţia $x' = 2t(1 + x^2)$.

Soluţie. Prin împărţire cu $1 + x^2$, separăm variabilele şi obţinem $\dfrac{x'}{1+x^2} = 2t$. La împărţirea cu $1 + x^2$ (strict pozitiv!) nu se pierd soluţii constante. Prin integrare şi folosirea formulei $dx = x'dt$, deducem

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \int 2tdt \implies \operatorname{arctg} x = t^2 + C \implies x = \operatorname{tg}(t^2 + C).$$

Exemplul 2.2. Rezolvaţi ecuaţia $x' + te^x = e^x$, cu condiţia $x(0) = -1$.

Soluţie. Aducem mai întâi ecuaţia la forma normală. Deoarece $x' = e^x - te^x = e^x(1-t)$, putem separa variabilele şi obţine $\dfrac{x'}{e^x} = 1 - t$. La împărţirea cu e^x (strict pozitiv!) nu se pierd soluţii constante. Atunci $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x} = \int (1-t)dt$, de unde

$$\int e^{-x}dx = t - \frac{t^2}{2} + C \implies -e^{-x} = t - \frac{t^2}{2} + C \implies x = -\ln(-t + \frac{t^2}{2} + C).$$

Urmează acum să determinăm C. Pentru $t = 0$, obţinem $x(0) = -\ln(-0 + 0 + C)$, adică $-1 = -\ln C$, de unde $C = e$. Urmează că $x = -\ln(-t + \frac{t^2}{2} + e)$.

Exemplul 2.3. Rezolvaţi ecuaţia $x' = tx$.

Soluţie. Putem separa variabilele şi obţine $\frac{x'}{x} = t$. Totuşi, prin împărţirea cu x se pierde soluţia $x \equiv 0$ (se observă că aceasta este soluţie a ecuaţiei), care trebuie adăugată ulterior.

Urmează că $\int \frac{dx}{x} = \int tdt$, de unde $\ln|x| = \frac{t^2}{2} + C$. Prin exponenţiere, cu notaţia $C_1 = e^C$ (deci C_1 este o constantă strict pozitivă),

$$|x| = e^{\frac{t^2}{2}+C} \implies |x| = C_1 e^{\frac{t^2}{2}} \implies x = \pm C_1 e^{\frac{t^2}{2}}$$

şi, cu notaţia $\pm C_1 = C_2$, unde C_2 este acum o constantă oarecare (dar nenulă), $x = C_2 e^{\frac{t^2}{2}}$, care este soluţia generală a ecuaţiei. La aceasta se adaugă soluţia "pierdută" $x \equiv 0$. Cele două pot fi scrise unificat sub forma $x = C_3 e^{\frac{t^2}{2}}$, $C_3 \in \mathbb{R}$.

Probleme propuse. Rezolvaţi următoarele ecuaţii cu variabile separabile.

1. $x' = 4xt^3$.
2. $(1 + t^2)x' - 2tx = 0$.
3. $x' = t^4(1 - x)$, cu condiţia $x(0) = 4$.
4. $\frac{dx}{dt} = 2\sqrt{x+2}\cos t$, cu condiţia $x(\pi) = 0$.

Matematici Aplicate, Curs 3

(cu probleme de rezolvat la curs)

Ecuaţii diferenţiale (continuare)

1 Ecuaţii diferenţiale de ordinul 1 integrabile prin metode elementare

1.1 Ecuaţii liniare

Sunt ecuaţii de forma

$$x' = a(t)x + b(t), \tag{EL}$$

unde $a, b : I \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue, membrul drept fiind o funcţie de gradul 1 (numită şi funcţie liniară) în variabila x.

Observaţie. Ecuaţia $x' = 2tx + x^2$ **nu** este ecuaţie liniară (membrul drept conţine x^2, nefiind funcţie liniară în x).

Ecuaţia $x' = t^2x + t^3$ este însă o ecuaţie liniară, cu coeficienţii $a(t) = t^2$ şi $b(t) = t^3$. Membrul drept nu poate conţine (de exemplu) puteri ale lui x, dar poate conţine puteri ale lui t!. Nici ecuaţia $x' = tx + \sin x$ nu este ecuaţie liniară, deoarece membrul drept conţine $\sin x$, nefiind atunci funcţie liniară în x.

Rezolvarea (EL)

Se poate folosi formula $x(t) = e^{P(t)} \int b(t)e^{-P(t)}dt$, unde P este o primitivă a lui a aleasă convenabil.

Observaţie. Conform formulei de mai sus, ecuaţia liniară omogenă $x' = a(t)x$ are soluţia $x(t) = Ce^{P(t)}$, unde P este o primitivă a lui a aleasă convenabil.

Exemplul 1.1. Rezolvaţi ecuaţia $x' = -3t^2x$, cu condiţia $x(0) = 5$.

Soluţie. Ecuaţia este liniară omogenă, cu $a(t) = -3t^2$. Deoarece $\int -3t^2dt = -t^3 + C$, o primitivă P a lui a este $P(t) = -t^3$, iar $x(t) = Ce^{-t^3}$. Pentru $t = 0$, obţinem $x(0) = Ce^0$, deci $C = 5$ şi în concluzie $x(t) = 5e^{-t^3}$.

Exemplul 1.2. Rezolvaţi ecuaţia $x' = -2tx + 2te^{-t^2}$.

Soluţie. Ecuaţia este liniară, cu $a(t) = -2t$ şi $b(t) = 2te^{-t^2}$. Deoarece $\int -2tdt = -t^2 + C$, o primitivă P a lui a este $P(t) = -t^2$. Atunci

$$x(t) = e^{-t^2} \int 2te^{-t^2}e^{t^2}dt = e^{-t^2} \int 2tdt = e^{-t^2}(t^2 + C).$$

Exemplul 1.3. Rezolvaţi ecuaţia $x' = -\frac{x}{t} + e^t$, $t > 0$.

Soluţie. Ecuaţia este liniară, cu $a(t) = -\frac{1}{t}$ şi $b(t) = e^t$. Deoarece $\int -\frac{1}{t}dt = -\ln|t| + C = -\ln t + C$, o primitivă P a lui a este $P(t) = -\ln t$. Atunci

$$x(t) = e^{-\ln t}\int e^t e^{\ln t}dt = \frac{1}{t}\int e^t t dt = \frac{1}{t}\int (e^t)' t dt = \frac{1}{t}\left(e^t t - \int e^t t' dt\right) = \frac{1}{t}(e^t t - e^t + C).$$

Rezolvare alternativă a (EL)

Se rezolvă mai întâi ecuaţia omogenă ataşată $x' = a(t)x$, obţinându-se soluţia

$$x_O(t) = Ce^{P(t)},$$

unde P este o primitivă a lui a aleasă convenabil. Se caută apoi o soluţie particulară a ecuaţiei (neomogene) (EL) de o formă apropiată soluţiei ecuaţiei omogene, prin metoda **variaţiei constantelor**,

$$x_P(t) = \gamma(t)e^{P(t)},$$

(C este înlocuit cu γ) unde γ este o **funcţie** necunoscută care se determină punând condiţia ca x_P să fie soluţie. Soluţia x_N a ecuaţiei (neomogene) (EL) se obţine cu ajutorul formulei

$$x_N(t) = x_O(t) + x_P(t)$$

(de reţinut mnemotehnica $N - O - P$).

Exemplul 1.4. Rezolvaţi ecuaţia $x' = -2tx + 2te^{-t^2}$.

Soluţie. Ecuaţia liniară omogenă asociată este $x' = -2tx$. Ca mai sus, deoarece $\int -2tdt = -t^2 + C$, o primitivă P a lui a este $P(t) = -t^2$. Atunci

$$x_O(t) = Ce^{-t^2}.$$

Căutăm o soluţie particulară pentru ecuaţia neomogenă sub forma

$$x_P(t) = \gamma(t)e^{-t^2}.$$

Înlocuind x_P în ecuaţia neomogenă, obţinem

$$\begin{aligned}
&\left(\gamma(t)e^{-t^2}\right)' = -2t\gamma(t)e^{-t^2} + 2te^{-t^2}\\
&\implies \gamma'(t)e^{-t^2} + \gamma(t)\left(e^{-t^2}\right)' = -2t\gamma(t)e^{-t^2} + 2te^{-t^2}\\
&\implies \gamma'(t)e^{-t^2} + \gamma(t)(-2t)e^{-t^2} = -2t\gamma(t)e^{-t^2} + 2te^{-t^2}\\
&\implies \gamma'(t)e^{-t^2} = 2te^{-t^2}\\
&\implies \gamma'(t) = 2t \implies \gamma(t) = \int 2tdt \implies \gamma(t) = t^2 + C.
\end{aligned}$$

Deoarece suntem interesaţi doar de o soluţie particulară, alegem $\gamma(t) = t^2$. Atunci, înlocuindu-l pe γ, obţinem

$$x_P(t) = t^2 e^{-t^2},$$

iar soluţia ecuaţiei iniţiale este

$$x_N(t) = x_O(t) + x_P(t) = Ce^{-t^2} + t^2 e^{-t^2} = e^{-t^2}(t + C).$$

Probleme propuse. Rezolvaţi următoarele ecuaţii liniare

1. $x' = x \cos t$, cu condiţia $x(\frac{\pi}{2}) = 2e$.
2. $x' = \dfrac{2}{t}x + t^2 \cos t$.
3. $x' = -2x + 3e^{4t}$.
4. $x' = x - t^2$.
5. $tx' = x - \ln t$.

1.2 Ecuaţii Bernoulli

Sunt ecuaţii de forma

$$x' = a(t)x + b(t)x^\alpha, \tag{EB}$$

unde $a, b : I \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue, iar $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ (pentru $\alpha = 0$ s-ar obţine o ecuaţie liniară, iar pentru $\alpha = 1$ s-ar obţine o ecuaţie cu variabile separabile). Într-o ecuaţie Bernoulli, membrul drept conţine x şi o singură altă putere a lui x, cu coeficienţii posibil funcţii de t.

Observaţie. Ecuaţia $x' = 2tx + x^2$ este o ecuaţie Bernoulli, cu $a(t) = 2t$, $b(t) = 1$ şi $\alpha = 2$. Ecuaţia $x' = t^2 x + x^2 + 2x^3$ nu este o ecuaţie Bernoulli deoarece, pe lângă x, membrul drept conţine două puteri ale lui x, în loc de una singură.

Rezolvarea (EB)

Se face împărţirea cu puterea lui x din membrul drept (x^α). Se obţine, după simplificare, $\dfrac{x'}{x^\alpha} = a(t)x^{1-\alpha} + b(t)$. Puterea lui x din membrul drept ($x^{1-\alpha}$) va fi variabila nouă. Se face deci schimbarea de variabilă $y = x^{1-\alpha}$, obţinându-se o ecuaţie liniară în y.

Exemplul 1.5. Rezolvaţi ecuaţia $x' = -\dfrac{1}{t}x + \dfrac{1}{t^2}x^2$, $t > 0$.

Soluţie. Se împarte cu x^2, obţinându-se că $\dfrac{x'}{x^2} = -\dfrac{1}{t}\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{t^2}$ (se observă de asemenea că $x \equiv 0$ este soluţie a ecuaţiei date. Schimbarea de variabilă este atunci $y = \dfrac{1}{x}$. Urmează că $y' = \left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{x'}{x^2}$.

Înlocuind în ecuaţia obţinută după împărţire, obţinem $-y' = -\frac{1}{t}y + \frac{1}{t^2}$, adică $y' = \frac{1}{t}y - \frac{1}{t^2}$ (o ecuaţie liniară în y).

Cum $\int \frac{1}{t}dt = \ln|t| + C = \ln t + C$, primitiva căutată este $P(t) = \ln t$. Folosind formula de rezolvare a unei ecuaţii liniare se obţine

$$y(t) = e^{\ln t}\int -\frac{1}{t^2}e^{-\ln t}dt \implies y(t) = -t\int \frac{1}{t^2}\frac{1}{t}dt \implies y(t) = -t\int \frac{1}{t^3}dt$$
$$\implies y(t) = -t\left(t^{-2}-2+C\right) \implies y(t) = -Ct + \frac{1}{2t}.$$

Deoarece $y = \frac{1}{x}$, urmează că $x = \dfrac{1}{-Ct + \frac{1}{2t}}$ (soluţia generală), la care trebuie adăugată $x \equiv 0$ (soluţia singulară). Se poate observa faptul că soluţia singulară nu se poate obţine din soluţia generală prin particularizarea constantei.

Exemplul 1.6. Rezolvaţi ecuaţia $x' = 2x^2 - 2\frac{x}{t}, \quad t > 0.$

Soluţie. Se împarte cu x^2, obţinându-se că $\frac{x'}{x^2} = 2 - \frac{2}{t}\frac{1}{x}$ (se observă de asemenea că $x \equiv 0$ este soluţie a ecuaţiei date. Schimbarea de variabilă este atunci $y = \frac{1}{x}$. Urmează că $y' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{x'}{x^2}$.

Înlocuind în ecuaţia obţinută după împărţire, obţinem $-y' = -\frac{2}{t}y + 2$, , adică $y' = \frac{2}{t}y - 2$ (o ecuaţie liniară în y).

Cum $\int \frac{2}{t}dt = 2\ln|t| + C = \ln t^2 + C$, primitiva căutată este $P(t) = \ln t^2$. Folosind formula de rezolvare a unei ecuaţii liniare se obţine

$$y(t) = e^{\ln t^2}\int -2e^{-\ln t^2}dt \implies y(t) = t^2\int \frac{-2}{t^2}dt \implies y(t) = t^2(\frac{2}{t} + C)$$
$$\implies y(t) = Ct^2 + 2t.$$

Deoarece $y = \frac{1}{x}$, urmează că $x = \frac{1}{Ct^2 + 2t}$ (soluţia generală), la care trebuie adăugată $x \equiv 0$ (soluţia singulară). Se poate observa faptul că soluţia singulară nu se poate obţine din soluţia generală prin particularizarea constantei.

Probleme propuse. Rezolvaţi următoarele ecuaţii Bernoulli.

1. $t^2x' - x^3 = tx.$
2. $x' + x = 2tx^2.$
3. $tx' - 4x = t^2\sqrt{x}.$

4. $x' = x^4 \cos t + x \operatorname{tg} t$, cu condiţia $x(0) = 1$.

Matematici Aplicate, Curs 4

(cu probleme de rezolvat la curs)

Ecuaţii diferenţiale (continuare)

1 Ecuaţii diferenţiale de ordinul 1 integrabile prin metode elementare

1.1 Ecuaţii Riccati

Sunt ecuaţii de forma
$$x' = a(t)x + b(t)x^2 + c(t), \tag{ER}$$
unde $a, b, c : I \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue, $b, c \not\equiv 0$. Într-o ecuaţie Riccati, membrul drept conţine x şi x^2, cu coeficienţii posibil funcţii de t (este asemănător cu membrul drept al unei ecuaţii Bernoulli, însă acum puterea este particulară, 2, în loc de α), şi un termen liber, $c(t)$, care nu apărea într-o ecuaţie Bernoulli.

Observaţie. Ecuaţia $x' = 2tx + x^3 + 2t$ nu este nici o ecuaţie Bernoulli (deoarece apare termenul liber $2t$, nici una Riccati (deoarece puterea lui x este 3, nu 2).

Rezolvarea (ER)

În lipsa unor date ajutătoare despre soluţie, acest tip de ecuaţii nu este rezolvabil explicit. Totuşi, dacă este cunoscută o soluţie particulară $\varphi = \varphi(t)$, după schimbarea de variabilă $x = u + \varphi$, ecuaţia Riccati se va transforma într-o ecuaţie Bernoulli în variabila u (se va reduce termenul liber). Apoi, această ecuaţie va fi transformată într-o ecuaţie liniară în necunoscuta z cu schimbarea de variabilă $u = \frac{1}{z}$.

Mai direct, schimbarea de variabilă $x = \frac{1}{z} + \varphi$ transformă ecuaţia Riccati de la început într-una liniară în variabila z.

Exemplul 1.1. Rezolvaţi ecuaţia $x' = x^2 - \frac{2}{t^2}$, $t > 0$, fiind cunoscută soluţia particulară $\varphi(t) = \frac{1}{t}$.

Soluţie. Efectuăm schimbarea de variabilă $x = \frac{1}{z} + \frac{1}{t}$. Atunci
$$x' = \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{t}\right)' = \left(\frac{1}{z}\right)' + (\frac{1}{t})' = -\frac{z'}{z^2} - \frac{1}{t^2}.$$

Înlocuind x' şi x în ecuaţie, urmează că
$$\begin{aligned}
-\frac{z'}{z^2} - \frac{1}{t^2} &= \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{t}\right)^2 - \frac{2}{t^2} \\
\implies -\frac{z'}{z^2} - \frac{1}{t^2} &= \frac{1}{z^2} + 2\frac{1}{z}\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} - \frac{2}{t^2} \\
\implies -\frac{z'}{z^2} &= \frac{1}{z^2} + 2\frac{1}{z}\frac{1}{t}.
\end{aligned}$$

Termenul liber a dispărut, însă ecuaţia nu este sub forma normală. Înmulţind cu

$-z^2$, obţinem

$$z' = -1 - z\frac{2}{t},$$

care este o ecuaţie liniară cu $a(t) = -\frac{2}{t}$ şi $b(t) = -1$. Deoarece $\int -\frac{2}{t}dt = -2\ln|t| + C = \ln(t^2) + C$, o primitivă P a lui a este $P(t) = \ln\frac{1}{t^2}$. Urmează atunci că

$$z(t) = e^{\ln\frac{1}{t^2}} \int (-1)e^{-\ln\frac{1}{t^2}}dt \implies z(t) = \frac{1}{t^2}\int -t^2 dt \implies z(t) = -\frac{1}{t^2}\int t^2 dt$$
$$\implies z(t) = -\frac{1}{t^2}\left(\frac{t^3}{3} + C\right) \implies z(t) = -\frac{t^3 + C}{3t^2}.$$

Revenind la schimbarea de variabilă $x = \frac{1}{z} + \frac{1}{t}$, urmează că

$$x = -\frac{3t^2}{t^3 + C} + \frac{1}{t}.$$

Exemplul 1.2. Rezolvaţi ecuaţia $x' = x\operatorname{ctg} t + x^2 - \sin^2 t$, $t \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, fiind cunoscută soluţia particulară $\varphi(t) = \sin t$.

Soluţie. Efectuăm schimbarea de variabilă $x = \frac{1}{z} + \sin t$. Atunci

$$x' = \left(\frac{1}{z} + \sin t\right)' = \left(\frac{1}{z}\right)' + (\sin t)' = -\frac{z'}{z^2} + \cos t.$$

Înlocuind x' şi x în ecuaţie, urmează că

$$-\frac{z'}{z^2} + \cos t = \left(\frac{1}{z} + \sin t\right)\operatorname{ctg} t + \left(\frac{1}{z} + \sin t\right)^2 - \sin^2 t$$
$$\implies -\frac{z'}{z^2} + \cos t = \frac{1}{z}\operatorname{ctg} t + \sin t \operatorname{ctg} t + \frac{1}{z^2} + 2\frac{1}{z}\sin t + \sin^2 t - \sin^2 t$$
$$\implies -\frac{z'}{z^2} = \frac{1}{z}\operatorname{ctg} t + \frac{1}{z^2} + 2\frac{1}{z}\sin t.$$

Termenul liber a dispărut, însă ecuaţia nu este sub forma normală. Înmulţind cu $-z^2$, obţinem

$$z' = -z(\operatorname{ctg} t + 2\sin t) - 1.$$

care este o ecuaţie liniară cu $a(t) = -(\operatorname{ctg} t + 2\sin t)$ şi $b(t) = -1$. Deoarece

$$\int -(\operatorname{ctg} t + 2\sin t)dt = -\int \operatorname{ctg} t dt - 2\int \sin t dt = -\int \frac{\cos t}{\sin t}dt + 2\cos t$$
$$= -\int \frac{(\sin t)'}{\sin t}dt + 2\cos t = -\ln|\sin t| + 2\cos t + C = -\ln\sin t + 2\cos t + C$$

o primitivă P a lui a este $P(t) = -\ln \sin t + 2\cos t$. Urmează atunci că

$$z(t) = e^{-\ln \sin t + 2\cos t} \int e^{-(-\ln \sin t + 2\cos t)} dt \implies z(t) = \frac{1}{\sin t} e^{2\cos t} \int \sin t e^{-2\cos t} dt$$
$$\implies z(t) = \frac{1}{2\sin t} e^{2\cos t} \int 2\sin t e^{-2\cos t} dt \implies z(t) = \frac{1}{2\sin t} e^{2\cos t} \left(e^{-2\cos t} + C\right)$$
$$\implies z(t) = \frac{Ce^{2\cos t} + 1}{2\sin t}.$$

Revenind la schimbarea de variabilă $x = \frac{1}{z} + \sin t$, urmează că

$$x = \frac{2\sin t}{Ce^{2\cos t} + 1} + \sin t.$$

Probleme propuse. Rezolvaţi următoarele ecuaţii Riccati.

1. $x' = (x - t)^2 + 1$, fiind dată soluţia particulară $\varphi(t) = t$.
2. $x' = \frac{1}{t}x + x^2 - 9t^2$, $t > 0$, fiind dată soluţia particulară $\varphi(t) = 3t$.
3. $x' = x^2 - \dfrac{x}{t} - \dfrac{1}{t^2}$, ştiind că admite o soluţie particulară de forma $\varphi(t) = \dfrac{A}{t}$, care trebuie determinată.
4. $t^2x' + tx + t^2x^2 = 9$, ştiind că admite o soluţie particulară de forma $\varphi(t) = \dfrac{A}{t}$, care trebuie determinată.
5. $x' + x^2 \sin t = \dfrac{2\sin t}{\cos^2 t}$, ştiind că admite o soluţie particulară de forma $\varphi(t) = \dfrac{A}{\cos t}$, care trebuie determinată.

1.2 Ecuaţii cu diferenţială exactă

Sunt ecuaţii de forma

$$P(t, x)dt + Q(t, x)dx = 0, \tag{EDE}$$

unde $P, Q : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sunt funcţii de clasă C^1, neidentic nule pe mulţimea simplu conexă D, verificând condiţia

$$\frac{\partial P}{\partial x}(t, x) = \frac{\partial Q}{\partial t}(t, x), \quad \text{pentru } (t, x) \in D. \tag{C}$$

Observaţie (mnemotehnică). Derivarea parţială din condiţie se face "încrucişat", în sensul că P, coeficientul lui dt, se derivează în raport nu cu t, ci cu x, iar P, coeficientul lui dt, se derivează în raport nu cu x, ci cu t.

Rezolvarea (EDE)

Se verifică mai întâi condiţia **(C)**. În această situaţie, expresia $P(t, x)dt + Q(t, x)dx$ este (exact) diferenţiala unei funcţii, adică există $F : D \to \mathbb{R}$ diferenţiabilă pe D astfel ca

$$dF(t, x) = P(t, x)dt + Q(t, x)dx.$$

Ecuaţia **(EDE)** devine atunci $dF(t,x) = 0$, soluţiile **(EDE)** putând fi scrise sub forma implicită
$$F(t, x(t)) = C,$$
unde C este o constantă arbitrară.

Funcţia F se determină ştiind că dacă $dF(t,x) = P(t,x)dt + Q(t,x)dx$, atunci deoarece
$$dF(t,x) = \frac{\partial F}{\partial t}(t,x)dt + \frac{\partial F}{\partial x}(t,x)dx,$$
urmează că
$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial t}(t,x) = P(t,x), \\ \dfrac{\partial F}{\partial x}(t,x) = Q(t,x) \end{cases}.$$
Se integrează prima ecuaţie şi se determină F până la o funcţie de variabila x. Funcţia de variabila x se determină prin înlocuire în cea de-a doua ecuaţie.

Exemplul 1.3. Rezolvaţi ecuaţia $(xe^{tx} - 4tx)dt + (te^{tx} - 2t^2)dx = 0$.

Soluţie. Etapa 1. Verificarea condiţiei (C).

În această situaţie, $P(t,x) = xe^{tx} - 4tx$, $Q(t,x) = te^{tx} - 2t^2$. Condiţia **(C)** se reduce la $\dfrac{\partial}{\partial x}(xe^{tx} - 4tx) = \dfrac{\partial}{\partial t}(te^{tx} - 2t^2)$. Deoarece
$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(xe^{tx} - 4tx) &= \frac{\partial}{\partial x}(xe^{tx}) - \frac{\partial}{\partial x}(4tx) = e^{tx} + xte^{tx} - 4t, \\ \frac{\partial}{\partial t}(te^{tx} - 2t^2) &= \frac{\partial}{\partial t}(te^{tx}) - \frac{\partial}{\partial t}(2t^2) = e^{tx} + txe^{tx} - 4t, \end{aligned}$$
condiţia **(C)** este verificată.

Etapa 2. Determinarea funcţiei F.

Determinăm funcţia F rezolvând sistemul
$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial t} = xe^{tx} - 4tx \\ \dfrac{\partial F}{\partial x} = te^{tx} - 2t^2 \end{cases}.$$
Deoarece $\dfrac{\partial F}{\partial t} = xe^{tx} - 4tx$, urmează că
$$F(t,x) = \int (xe^{tx} - 4tx)dt = x\int e^{tx}dt - 4x\int tdt = e^{tx} - 2t^2x + \varphi(x)$$
(fiind dată derivata lui F în raport cu t, putem determina pe F prin integrare, dar nu total, ci doar pînă la o funcţie de variabila rămasă). Determinăm pe φ înlocuind

în cea de-a doua ecuaţie. Avem că

$$\frac{\partial}{\partial x}(e^{tx} - 2t^2 x + \varphi(x)) = te^{tx} - 2t^2 \implies te^{tx} - 2t^2 + \varphi'(x) = te^{tx} - 2t^2 \implies \varphi'(x) = 0,$$

adică φ este constantă. Soluţia ecuaţiei se reprezintă implicit sub forma

$$e^{tx} - 2t^2 x = C.$$

Probleme propuse. Rezolvaţi următoarele ecuaţii cu diferenţiale exacte.

1. $(t^3 + x)dt + tdx = 0$. Poate fi rezolvată şi ca ecuaţie liniară?
2. $2txdt + (t^2 - x^2)dx = 0$.
3. $(t^2 + x^2 + 2t)dt + 2txdx = 0$.
4. $(6tx + 4x^2 + 4t)dt + (3t^2 + 8tx)dx = 0$.

Matematici Aplicate, Curs 5

(cu probleme de rezolvat la curs)

Ecuaţii diferenţiale (continuare)

1 Ecuaţii diferenţiale de ordinul 1 integrabile prin metode elementare

1.1 Ecuaţii omogene (EO)

Sunt ecuaţii de forma

$$x' = f\left(\frac{x}{t}\right), \tag{EO}$$

$f : I \to \mathbb{R}$, f continuă pe I, $f(u) \neq u$ pentru orice $u \in I$. Altfel spus, într-o ecuaţie omogenă, eventual după efectuarea unor calcule algebrice, membrul drept conţine x şi t doar "împreună", sub forma unei funcţii de raportul $\frac{x}{t}$.

Rezolvarea (EO)

Se va alege $\frac{x}{t}$, care "se repetă", ca variabilă nouă. Cu notaţia $\frac{x}{t} = u$, urmează că $x = tu$. Cum u, ca şi t, este o funcţie de variabila t, urmează că

$$x' = (tu)' = t'u + tu' = u + tu'.$$

Această formulă de calcul va fi înlocuită în ecuaţia iniţială, împreună cu relaţia $\frac{x}{t} = u$. După înlocuire, se va obţine o ecuaţie cu variabile separabile.

Exemplul 1.1. Rezolvaţi ecuaţia $x' = e^{\frac{x}{t}} + \frac{x}{t}, \quad t > 0$.

Soluţie. Notăm $\frac{x}{t} = u$. Atunci $x' = u + tu'$, iar înlocuind în ecuaţia iniţială obţinem

$$u + tu' = e^u + u \implies tu' = e^u \implies \frac{u'}{e^u} = \frac{1}{t}.$$

Prin integrare se obţine că

$$\int \frac{du}{e^u} = \int \frac{1}{t} dt \implies \frac{e^{-u}}{-1} = \ln|t| + C \implies e^{-\frac{x}{t}} = -\ln t + C.$$

Exemplul 1.2. Rezolvaţi ecuaţia $(x^2 + tx + t^2)dt - t^2 dx = 0$, $t > 0$, cu condiiţia $x(1) = 1$.

Soluţie. Ecuaţia poate fi adusă la forma canonică a unei ecuaţii omogene, întrucât coeficienţii lui dt şi dx, $x^2 + tx + t^2$ şi t^2 conţin doar monoame de gradul al doilea în (t, x). Împărţind cu t^2, umează că

$$\left(\left(\frac{x}{t}\right)^2 + \frac{x}{t} + 1\right) dt - dx = 0 \implies \frac{dx}{dt} = \left(\frac{x}{t}\right)^2 + \frac{x}{t} + 1 \implies x' = \left(\frac{x}{t}\right)^2 + \frac{x}{t} + 1.$$

Notăm $\frac{x}{t} = u$. Atunci $x' = u + tu'$, iar înlocuind în ecuaţia de mai sus, obţinem

$$u + tu' = u^2 + u + 1 \implies tu' = u^2 + 1.$$

aceasta fiind o ecuaţie cu variabile separabile. Urmează că

$$\frac{u'}{u^2+1} = \frac{1}{t} \implies \int \frac{du}{u^2+1} = \int \frac{1}{t} dt \implies \operatorname{arctg} u = \ln|t| + C.$$

În concluzie, $\operatorname{arctg} \frac{x}{t} = \ln t + C$. Pentru $t = 1$, folosind condiţia $x(1) = 1$, urmează că

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{1} = \ln 1 + C \implies C = \frac{\pi}{4},$$

ceea ce conduce la $\operatorname{arctg} \frac{x}{t} = \ln t + \frac{\pi}{4}$ (şi la faptul că soluţia nu este definită decât pentru acele valori ale lui t pentru care $-\frac{\pi}{2} < \ln t + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$, în speţă pentru $t \in (e^{-\frac{3\pi}{4}}, e^{\frac{\pi}{4}})$).

Probleme propuse. Rezolvaţi următoarele ecuaţii omogene

1. $x' = \frac{t^2 + x^2}{tx}$, $t > 0$.
2. $x' = \frac{x}{t} + \left(\frac{x}{t}\right)^2$, $t > 0$, cu condiţia $x(1) = -\frac{1}{2}$.
3. $x' = \frac{x+t}{t-x}$.
4. $x' = \frac{2tx}{t^2 - x^2}$, cu condiţia $x(1) = 1$.
5. $2txx' = t^2 + 3x^2$, cu condiţia $x(1) = 3$

2 Ecuaţii diferenţiale de ordinul n cu coeficienţi constanţi

Definiţia 2.1. *Numim* **ecuaţie diferenţială de ordinul n cu coeficienţi constanţi** *o ecuaţie de forma*

$$a_n x^{(n)}(t) + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = f(t), \tag{2.1}$$

unde $a_1, a_2, \ldots a_n \in \mathbb{R}$, $x : I \to \mathbb{R}$, iar $f : I \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă pe intervalul I. Dacă $f \equiv 0$, ecuaţia se numeşte **omogenă**, *în timp ce dacă $f \not\equiv 0$, ecuaţia se numeşte* **neomogenă**.

Exemplul 2.1. Ecuaţia $x'' - 4x' + 3x = 0$ este o ecuaţie cu coeficienţi constanţi de ordinul al doilea omogenă, în vreme ce $x''' - 6x'' + 11x' - 6x = e^t$ este o ecuaţie cu coeficienţi constanţi de ordinul al treilea neomogenă

2.1 Ecuaţii diferenţiale de ordinul n cu coeficienţi constanţi omogene

Teorema 2.1. *Mulţimea soluţiilor unei ecuaţii diferenţiale de ordinul n cu coeficienţi constanţi omogene este un spaţiu liniar de dimensiune n.*

Conform teoremei de mai sus, dacă $B = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ este o bază în acest spaţiu, atunci o soluţie oarecare a ecuaţiei este

$$x = C_1 x_1 + C_2 x_2 + \ldots + C_n x_n, \quad C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathbb{R}.$$

Devine deci important să găsim o bază în spaţiul de soluţii al unei ecuaţii omogene. Fie ecuaţia

$$a_n x^{(n)}(t) + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = 0. \tag{EO}$$

Căutăm o soluţie de forma $x(t) = e^{\lambda t}$. Atunci

$$x'(t) = \lambda e^{\lambda t}, x''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}, \ldots, x^{(n)}(t) = \lambda^n e^{\lambda t},$$

de unde

$$(a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0) e^{\lambda t} = 0,$$

ceea ce conduce la

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0 = 0, \tag{EC}$$

ecuaţie numită **ecuaţia caracteristică ataşată** (EO). De notat că ecuaţia caracteristică (care este o ecuaţie algebrică, necunoscuta λ fiind număr, nu funcţie) se obţine din ecuaţia diferenţială omogenă căreia i se ataşează înlocuind x cu λ, iar ordinul de derivare cu puterea corespunzătoare.

Exemplul 2.2. Ecuaţia caracteristică ataşată ecuaţiei diferenţiale omogene $x'' - 4x' + 3x = 0$ este $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$, în vreme ce e cuaţia caracteristică ataşată ecuaţiei diferenţiale omogene $x''' - 6x'' + 11x' - 6x = 0$ este $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$. De observat că x se înlocuieşte cu 1 (adică cu λ^0), nu cu λ, deoarece este derivat de 0 ori.

Au loc următoarele situaţii.

1. Dacă (EC) are rădăcinile reale şi diferite $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, atunci

$$B = \{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}\},$$

iar

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \ldots + c_n e^{\lambda_n t}.$$

Exemplul 2.3. Fie ecuaţia diferenţială omogenă $x'' - 4x' + 3x = 0$. Ecuaţia caracteristică ataşată este $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$, cu rădăcinile reale simple $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$. Atunci

$$B = \{e^t, e^{3t}\},$$

iar

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{3t}.$$

2. Dacă (EC) are rădăcinile reale $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, cu multiplicităţile $m_1, m_2, \ldots, m_p$, atunci porţiunea din bază corespunzătoare rădăcinii λ_k, $1 \leq k \leq p$, este

$$\{e^{\lambda_k t}, te^{\lambda_k t}, \ldots, t^{m_k-1}e^{\lambda_k t}\}$$

(corespund exact atâtea elemente cât este ordinul de multiplicitate al rădăcinii, obţinute din $e^{\lambda_k t}$, ceea ce corespunde în bază dacă rădăcina este simplă, prin înmulţire cu puteri ale lui t.).

Exemplul 2.4. Fie ecuaţia diferenţială omogenă $x''' - 7x'' + 16x' - 12x = 0$. Ecuaţia caracteristică ataşată este $\lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12 = 0$, cu rădăcina reală dublă $\lambda_1 = 2$ şi rădăcina reală simplă $\lambda_2 = 3$. Atunci

$$B = \{e^{2t}, te^{2t}, e^{3t}\},$$

iar

$$x(t) = C_1e^{2t} + C_2te^{2t} + C_3e^{3t}.$$

3. Dacă (EC) admite rădăcina complexă $\alpha + i\beta$, cu ordinul de multiplicitate m, atunci admite şi rădăcina complexă conjugată $\alpha - i\beta$, cu acelaşi ordin de multiplicitate, fiind ecuaţie cu coeficienţi reali. Împreună, cele două rădăcini ar contribui la bază, ca mai sus, cu

$$e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t), \quad e^{(\alpha-i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t - i\sin\beta t)$$

şi cu produsul dintre aceste funcţii şi puterile lui t până $m-1$ inclusiv. Totuşi, pentru a evita utilizarea numerelor complexe, vor fi folosite în locul acestora

$$e^{\alpha t}\cos\beta t, \quad e^{\alpha t}\sin\beta t$$

(partea reală, respectiv partea imaginară, a lui $e^{(\alpha+i\beta)t}$) şi produsele dintre aceste funcţii şi puterile lui t până la $m-1$ inclusiv. De notat că dacă ecuaţia (EO) admite soluţia complexă $x = u + iv$ atunci funcţiile reale u şi v sunt şi ele soluţii ale (EO).

Exemplul 2.5. Fie ecuaţia diferenţială omogenă $x''' + 8x = 0$. Ecuaţia caracteristică asociată este $\lambda^3 + 8 = 0$. Deoarece

$$\lambda^3 + 8 = \lambda^3 + 2^3 = (\lambda+2)(\lambda^2 + 2\lambda + 2^2),$$

ecuaţia caracteristică asociată are rădăcina reală simplă $\lambda_1 = -2$ şi rădăcinile complexe conjugate simple $\lambda_2 = -1 + i\sqrt{3}$, $\lambda_3 = -1 - i\sqrt{3}$. Atunci baza în spaţiul de soluţii este

$$B = \{e^{-2t}, e^{-t}\cos\sqrt{3}t, e^{-t}\sin\sqrt{3}t\}.$$

iar soluţia este

$$x(t) = C_1e^{-2t} + C_2e^{-t}\cos\sqrt{3}t + C_3e^{-t}\sin\sqrt{3}t.$$

Exemplul 2.6. Rezolvaţi ecuaţia diferenţială omogenă $x''(t) - 7x'(t) + 10x(t) = 0$ cu condiţiile iniţiale $\begin{cases} x(0) = 2 \\ x'(0) = 1 \end{cases}$.

Soluţie. Ecuaţia caracteristică asociată este

$$\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0,$$

cu rădăcinile reale simple $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 5$. Atunci baza este

$$B = \{e^{2t}, e^{5t}\},$$

iar soluţia este

$$x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{5t}.$$

Cum $x(0) = 2$, urmează că $2 = C_1 + C_2$. Deoarece condiţiile iniţiale folosesc x', calculăm şi $x'(t) = 2C_1 e^{2t} + 5C_2 e^{5t}$. Cum $x'(0) = 2$, urmează că $1 = 2C_1 + 5C_2$. Rezolvând sistemul $\begin{cases} C_1 + C_2 = 2 \\ 2C_1 + 5C_2 = 1 \end{cases}$ obţinem că $C_1 = 3$, $C_2 = -1$, de unde

$$x(t) = 3e^{2t} - e^{5t}.$$

Probleme propuse. 1. Rezolvaţi următoarele ecuaţii ecuaţii diferenţiale cu coeficienţi constanţi omogene

(a) $x'' - 5x' + 6x = 0.$

(b) $x'' - x' - 12x = 0.$

(c) $x'' - 6x' + 9x = 0.$

(d) $x'' - 10x' + 25x = 0.$

(e) $x'' + 6x' + 13x = 0.$

(f) $x'' - 4x' + 8x = 0.$

(g) $x''' - 6x'' + 11x' - 6x = 0.$

(h) $x^{(4)} - 5x'' + 4x = 0.$

(i) $x''' - 3x'' + 3x' - x = 0.$

(j) $x''' + 6x'' + 12x' + 8x = 0.$

(k) $x^{(4)} - 6x''' + 10x'' - 6x' + 9x = 0.$

(l) $x^{(5)} - 4x^4 + 3x''' = 0.$

(m) $x^{(5)} + 6x^4 + 9x''' = 0.$

2. Rezolvaţi următoarele probleme Cauchy

(a) $x''(t) - 5x'(t) + 6x(t) = 0$, cu condiţiile iniţiale $\begin{cases} x(0) = 1 \\ x'(0) = 1 \end{cases}$.

(b) $x''(t) + 5x'(t) + 4x(t) = 0$, cu condiţiile iniţiale $\begin{cases} x(0) = 3 \\ x'(0) = -6 \end{cases}$.

(c) $x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = 0$, cu condiţiile iniţiale $\begin{cases} x(0) = 1 \\ x'(0) = 1 \end{cases}$.

(d) $x'''(t) - x''(t) = 0$, cu condiţiile iniţiale $\begin{cases} x(0) = 5 \\ x'(0) = 1 \\ x''(0) = 2 \end{cases}$

Matematici Aplicate, Curs 6-7-8

(cu probleme de rezolvat la curs)

Ecuaţii diferenţiale (continuare)

1 Ecuaţii diferenţiale de ordinul n cu coeficienţi constanţi

1.1 Ecuaţii diferenţiale de ordinul n cu coeficienţi constanţi omogene

1.1.1 Wronskianul unui sistem de soluţii

Este cunoscut că un spaţiu liniar admite o infinitate de baze. În particular, bazele construite în spaţiul de soluţii al unei ecuaţii omogene prin procedeul menţionat în cursul precedent nu sunt unice (în fapt, în situaţia în care ecuaţia caracteristică are rădăcini complexe, am utilizat deja o formă modificată a bazei "canonice"). Dat fiind un sistem de soluţii

$$S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

al ecuaţiei

$$a_n x^{(n)}(t) + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = 0, \tag{EO}$$

dorim să putem verifica dacă acest sistem este bază în spaţiul de soluţii.

Definiţia 1.1. *Numim* **wronskian** *al sistemului de soluţii* $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ *determinantul*

$$W(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_1' & x_2' & \ldots & x_n' \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ x_1^{(n-1)} & x_2^{(n-1)} & \ldots & x_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Teorema 1.1. *S este o bază în spaţiul de soluţii al ecuaţiei* (EO) $\Leftrightarrow W(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq 0$ *pe intervalul de existenţă al soluţiilor.*

Exemplul 1.1. Demonstraţi că

$$S = \{x_1(t) = e^{3t} + e^{2t}, x_2(t) = e^{3t} - e^{2t}\}$$

reprezintă o bază în spaţiul soluţiilor ecuaţiei $x'' - 5x' + 6x = 0$.

Soluţie. Mai întâi, să observăm că

$$\begin{aligned} x_1'' - 5x_1' + 6x_1 &= (e^{3t} + e^{2t})'' - 5(e^{3t} + e^{2t})' + 6(e^{3t} + e^{2t}) \\ &= 9e^{3t} + 4e^{2t} - 5(3e^{3t} + 2e^{2t}) + 6(e^{3t} + e^{2t}) \\ &= 0, \end{aligned}$$

deci x_1 este o soluţie a ecuaţiei. Similar observăm că şi x_2 este o soluţie a ecuaţiei.

Să notăm că

$$W(x_1,x_2) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix} \implies W(x_1,x_2) = \begin{vmatrix} e^{3t}+e^{2t} & e^{3t}-e^{2t} \\ (e^{3t}+e^{2t})' & (e^{3t}-e^{2t})' \end{vmatrix}$$

$$\implies W(x_1,x_2) = \begin{vmatrix} e^{3t}+e^{2t} & e^{3t}-e^{2t} \\ 3e^{3t}+2e^{2t} & 3e^{3t}-2e^{2t} \end{vmatrix} = 2e^{5t} \neq 0.$$

Conţinând 2 elemente, număr egal cu ordinul ecuaţiei, S este deci bază în spaţiul soluţiilor ecuaţiei $x'' - 5x' + 6x = 0$.

Probleme propuse. 1. (a) Demonstraţi că

$$S = \{x_1(t) = 2\sin t + 3\cos t, x_2(t) = 3\sin t + 4\cos t\}$$

reprezintă o bază în spaţiul soluţiilor ecuaţiei $x'' + x = 0$.

(b) Demonstraţi că

$$S = \{x_1(t) = e^t + \sin t, x_2(t) = e^t + \cos t, x_3(t) = \sin t + \cos t\}$$

reprezintă o bază în spaţiul soluţiilor ecuaţiei $x''' - x'' + x' - x = 0$.

1.2 Ecuaţii diferenţiale de ordinul n cu coeficienţi constanţi neomogene

Mulţimea soluţiilor unei ecuaţii diferenţiale de ordinul n cu coeficienţi constanţi neomogene nu mai este un spaţiu liniar de dimensiune n. Soluţia generală a unei ecuaţii diferenţiale de ordinul n cu coeficienţi constanţi neomogene se determină cu ajutorul formulei

$$x_N(t) = x_O(t) + x_P(t),$$

unde

- x_N este soluţia generală a ecuaţiei neomogene.
- x_O este soluţia generală a ecuaţiei omogene.
- x_P este o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene.

O metodă de determinare a lui x_O este, în acest moment, cunoscută deja. Soluţia particulară x_P poate fi determinată într-unul din următoarele moduri.

1. Prin căutarea într-o formă prestabilită, asemănătoare cu a membrului drept (dacă membrul drept se încadrează într-un anumit tipar).
2. Prin căutarea într-o formă asemănătoare cu cea a soluţiei ecuaţiei omogene, cu ajutorul metodei variaţiei constantelor.

1.2.1 Căutarea lui x_P într-o formă prestabilită

1. Dacă $f(t) = Ce^{\alpha t}$, atunci
$$x_P(t) = De^{\alpha t} t^l,$$
unde l este ordinul de multiplicitate al lui α ca rădăcină a ecuaţiei caracteristice.

2. Dacă $f(t) = P(t)$, P fiind un polinom, atunci
$$x_P(t) = Q(t) t^l,$$
unde l este ordinul de multiplicitate al lui 0 ca rădăcină a ecuaţiei caracteristice, iar Q este tot un polinom, cu grad Q = grad P.

3. Dacă $f(t) = P(t)e^{\alpha t}$, P fiind un polinom, atunci
$$x_P(t) = Q(t)e^{\alpha t} t^l,$$
unde l este ordinul de multiplicitate al lui α ca rădăcină a ecuaţiei caracteristice, iar Q este tot un polinom, cu grad Q = grad P.

4. Dacă, în general, $f(t) = e^{\alpha t}(P_1(t)\cos(\beta t) + P_2(t)\sin(\beta t))$, atunci
$$x_P(t) = e^{\alpha t}(Q_1(t)\cos \beta t + Q_2(t)\sin(\beta t)) t^l,$$
unde l este ordinul de multiplicitate al lui $\alpha + i\beta$ ca rădăcină a ecuaţiei caracteristice, iar grad Q_1 = grad Q_2 = max(grad P_1, grad P_2).

Exemplul 1.2. Rezolvaţi ecuaţia diferenţială liniară neomogenă cu coeficienţi constanţi
$$x''(t) + 4x'(t) + 4x(t) = 16e^{2t}.$$

Soluţie. Rezolvăm mai întâi ecuaţia omogenă
$$x''(t) + 4x'(t) + 4x(t) = 0.$$
Ecuaţia caracteristică ataşată este
$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0,$$
cu rădăcina dublă $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$. Soluţia ecuaţiei omogene este atunci
$$x_O(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t}.$$
Întrucât membrul drept este o exponenţială, căutăm soluţia particulară a ecuaţiei neomogene $x_P(t)$ de forma
$$x_P(t) = De^{2t} t^l,$$
unde l este ordinul de multiplicitate al lui 2 ca rădăcină a ecuaţiei caracteristice. Cum 2 nu este rădăcină a ecuaţiei caracteristice, urmează că $l = 0$, iar $x_P(t) = De^{2t}$.

Pentru a determina D, înlocuim $x_P(t)$ în ecuaţia iniţială, obţinând că
$$(De^{2t})''(t) + 4(De^{2t})' + 4De^{2t} = 16e^{2t} \implies 4De^{2t} + 4 \cdot 2De^{2t} + 4De^{2t} = 16e^{2t}$$

$$\implies 16De^{2t} = 16e^{2t} \implies D = 1 \implies x_P(t) = e^{2t}.$$

Atunci
$$x(t) = x_N(t) = x_O(t) + x_P(t) = C_1e^{-2t} + C_2te^{-2t} + e^{2t}.$$

Exemplul 1.3. Rezolvaţi ecuaţia diferenţială liniară neomogenă cu coeficienţi constanţi

$$x'''(t) - 7x''(t) + 14x'(t) - 8x(t) = 8t^2 + 4t - 34.$$

Soluţie. Rezolvăm mai întâi ecuaţia omogenă

$$x'''(t) - 7x''(t) + 14x'(t) - 8x(t) = 0.$$

Ecuaţia caracteristică ataşată este

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 14\lambda - 8 = 0.$$

Căutăm soluţiile întregi ale acestei ecuaţii printre divizorii (întregi) ai termenului liber, -8. Observăm că $D_{-8} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\}$, iar înlocuind λ cu 1 în ecuaţia de mai sus, avem că $1^3 - 7 \cdot 1^2 + 14 \cdot 1 - 8 = 0$, deci $\lambda_1 = 1$ este rădăcină. Pentru a determina celelalte două rădăcini, folosim schema lui Horner.

λ^3	λ^2	λ^1	1
1	-7	14	-8
1	-7+1$\cdot$ 1=-6	14+(-6)$\cdot$ 1=8	-8+8$\cdot$ 1=0

Celelalte două rădăcini sunt soluţii ale ecuaţiei $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$, de unde $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 4$. Soluţia ecuaţiei omogene este atunci

$$x_O(t) = C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{4t}.$$

Întrucât membrul drept este o funcţie polinomială de gradul al doilea, căutăm soluţia particulară a ecuaţiei neomogene $x_P(t)$ de forma

$$x_P(t) = Q(t)t^l,$$

unde l este ordinul de multiplicitate al lui 0 ca rădăcină a ecuaţiei caracteristice, iar Q este un polinom de gradul al doilea, $Q(t) = At^2 + Bt + C$. Cum 2 nu este rădăcină a ecuaţiei caracteristice, urmează că $l = 0$, iar $x_P(t) = At^2 + Bt + C$.

Pentru a determina A, B, C, înlocuim $x_P(t)$ în ecuaţia iniţială, obţinând că

$$(At^2 + Bt + C)''' - 7(At^2 + Bt + C)'' + 14(At^2 + Bt + C)' - 8(At^2 + Bt + C) = 8t^2 + 4t - 34$$
$$\implies 0 - 7 \cdot 2A + 14(2At + B) - 8(At^2 + Bt + C) = 8t^2 + 4t - 34$$
$$\implies -8At^2 + (28A - 8B)t + (-14A + 14B - 8C) = 8t^2 + 4t - 34.$$

Prin identificarea coeficienţilor obţinem

$$\begin{cases} -8A = 8 \\ 28A - 8B = 4 \\ -14A + 14B - 8C = -34 \end{cases},$$

sistem cu soluţia $A = -1$, $B = -4$, $C = -1$. Urmează că

$$x_P(t) = -t^2 - 4t - 1.$$

Atunci

$$x(t) = x_N(t) = x_O(t) + x_P(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + C_3 e^{4t} - t^2 - 4t - 1.$$

Probleme propuse. 1. Rezolvaţi următoarele ecuaţii ecuaţii diferenţiale cu coeficienţi constanţi neomogene

(a) $x'' - 4x' + 3x = 4e^{2t}$.

(b) $x'' - 6x' + 8x = 3e^{2t}$.

(c) $x'' - 3x' - 4x = t + 1$.

(d) $x'' - 6x' = 20t - 12$.

(e) $x'' + 6x' + 10x = 2t - 1$.

(f) $x'' - 4x' + 13x = te^{2t}$.

Observaţie. De notat că dacă membrul drept nu este de una dintre formele de mai sus, dar poate fi scris ca o sumă de funcţii de acest tip, atunci se pot căuta soluţii particulare corespunzând fiecărui termen din sumă, soluţia particulară căutată fiind suma soluţiilor particulare "parţiale" (**principiul superpoziţiei**).

Exemplul 1.4. Rezolvaţi ecuaţia diferenţială liniară neomogenă cu coeficienţi constanţi

$$x'' + 2x' + 5x = 8e^t + 5t + 12.$$

Soluţie. Rezolvăm mai întâi ecuaţia omogenă

$$x'' + 2x' + 5x = 0.$$

Ecuaţia caracteristică ataşată este

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0,$$

cu soluţiile $\lambda_1 = 1 - 2i$, $\lambda_2 = 1 + 2i$. Soluţia ecuaţiei omogene este atunci

$$x_O(t) = C_1 e^t \cos 2t + C_2 e^t \sin 2t.$$

Căutăm mai întâi o soluţie particulară a ecuaţiei

$$x'' + 2x' + 5x = 8e^t,$$

de forma
$$x_P = De^t t^l,$$
unde l este ordinul de multiplicitate al lui 1 ca rădăcină a ecuaţiei caracteristice. Atunci $l = 0$, iar înlocuind în ecuaţie obţinem $D = 1$, deci $x_P(t) = e^t$.

Căutăm acum o soluţie particulară a ecuaţiei
$$x'' + 2x' + 5x = 5t + 12,$$
de forma
$$x_P = Q(t)t^l,$$
unde l este ordinul de multiplicitate al lui 0 ca rădăcină a ecuaţiei caracteristice, iar Q este un polinom de gradul 1, $Q(t) = At + B$. Atunci $l = 0$, iar înlocuind în ecuaţie obţinem $A = 1$, $B = 2$, deci $x_P = t + 2$.

Soluţia particulară căutată este atunci suma celor două soluţii particulare "parţiale", adică
$$x_P = e^t + t + 2.$$
Urmează că
$$x(t) = C_1 e^t \cos 2t + C_2 e^t \sin 2t + e^t + t + 2.$$

Probleme propuse. 1. Rezolvaţi următoarele ecuaţii ecuaţii diferenţiale cu coeficienţi constanţi neomogene

(a) $x'' - 3x' + 2x = 2e^{3t} + t$.

(b) $x''' - 6x'' + 11x' - 6x = 12e^{4t} + t + 2$.

1.2.2 Căutarea lui x_P prin metoda variaţiei constantelor

Presupunem că este deja găsită o bază
$$B = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$
în spaţiul de soluţii al (EO). Atunci x_P se poate căuta sub forma
$$x_P = \gamma_1(t)x_1 + \gamma_2(t)x_2 + \ldots + \gamma_n(t)x_n$$
(de o formă asemănătoare cu a soluţiei (EO), dar cu constantele C_1, $C_2, \ldots C_n$ înlocuite cu funcţiile $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t) \ldots \gamma_n(t)$), unde $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t) \ldots \gamma_n(t)$ verifică sistemul
$$\begin{cases} \gamma_1'(t)x_1(t) + \gamma_2'(t)x_2(t) + \ldots + \gamma_n'(t)x_n(t) = 0 \\ \gamma_1'(t)x_1'(t) + \gamma_2'(t)x_2'(t) + \ldots + \gamma_n'(t)x_n'(t) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ \gamma_1'(t)x_1^{(n-1)}(t) + \gamma_2'(t)x_2^{(n-1)}(t) + \ldots + \gamma_n'(t)x_n^{(n-1)}(t) = f(t) \end{cases}.$$
(primii $n-1$ membri drepţi sunt 0, iar ultimul membru drept este termenul liber din ecuaţia iniţială).

Exemplul 1.5. Rezolvaţi ecuaţia

$$x''(t) - 5x'(t) + 4x(t) = 2e^{3t}$$

cu condiţiile iniţiale $\begin{cases} x(0) = 2 \\ x'(0) = 3 \end{cases}$.

Soluţie. Ecuaţia dată este o ecuaţie neomogenă. Rezolvăm mai întâi ecuaţia omogenă

$$x''(t) - 5x'(t) + 4x(t) = 0.$$

Ecuaţia caracteristică ataşată este

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0,$$

cu rădăcinile reale distincte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$. Soluţia ecuaţiei omogene este atunci

$$x_O(t) = C_1 e^t + C_2 e^{4t}.$$

Căutam $x_P(t)$ sub forma

$$x_P(t) = \gamma_1(t)e^t + \gamma_2(t)e^{4t}$$

(înlocuim C_1 şi C_2 din expresia lui x_O cu γ_1 şi γ_2), unde $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$ verifică sistemul

$$\begin{cases} \gamma_1'(t)e^t + \gamma_2'(t)e^{4t} = 0 \\ \gamma_1'(t)(e^t)' + \gamma_2'(t)(e^{4t})' = 2e^{3t} \end{cases}.$$

Atunci $\begin{cases} \gamma_1'(t)e^t + \gamma_2'(t)e^{4t} = 0 \\ \gamma_1'(t)e^t + 4\gamma_2'(t)e^{4t} = 2e^{3t} \end{cases}$.

Prin eliminare, obţinem că $3\gamma_1'(t)e^t = -2e^{3t}$, de unde $\gamma_1'(t) = -\frac{2}{3}e^{2t}$, ceea ce conduce la $\gamma_1(t) = -\frac{1}{3}e^{2t}$. Similar, $3\gamma_2'(t)e^{4t} = 2e^{3t}$, de unde $\gamma_2'(t) = \frac{2}{3}e^{-t}$, ceea ce conduce la $\gamma_2(t) = -\frac{2}{3}e^{-t}$. De aici,

$$x_P(t) = \gamma_1(t)e^t + \gamma_2(t)e^{4t} = -\frac{1}{3}e^{2t} \cdot e^t - \frac{2}{3}e^{-t} \cdot e^{4t} = -e^{3t}.$$

Atunci

$$x(t) = x_N(t) = x_O(t) + x_P(t) = C_1 e^t + C_2 e^{4t} - e^{3t}.$$

Întrucât există condiţii iniţiale, putem determina C_1 şi C_2. Pentru $t = 0$ obţinem că $x(0) = C_1 + C_2 - 1$. Observăm de asemenea că

$$x'(t) = C_1 e^t + 4C_2 e^{4t} - 3e^{3t},$$

de unde pentru $t = 0$ obţinem că $x'(0) = C_1 + 4C_2 - 3$. Din condiţiile iniţiale obţinem sistemul

$$\begin{cases} C_1 + C_2 - 1 = 2 \\ C_1 + 4C_2 - 3 = 3 \end{cases},$$

cu soluţiile $C_1 = 2$, $C_2 = 1$. Atunci soluţia ecuaţiei date este

$$x(t) = 2e^t + e^{4t} - e^{3t}.$$

Probleme propuse. 1. Rezolvaţi următoarele ecuaţii diferenţiale cu coeficienţi constanţi neomogene

(a) $x'' + x = \dfrac{1}{\sin t}$, $t \in (0, \pi)$.

(b) $x'' + x = 6\sin^2 t$.

(c) $x'' - 2x' + x = \dfrac{2e^t}{t^2}$, $t > 0$.

Matematici Aplicate, Curs 9

(cu probleme de rezolvat la curs)

Sisteme de ecuaţii diferenţiale

1 Sisteme de ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul 1 cu coeficienţi constanţi

Definiţia 1.1. *Numim* **sistem de ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul** 1 **cu coeficienţi constanţi** *un sistem de forma*

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + f_1(t) \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + f_2(t) \\ \quad\vdots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + f_n(t) \end{cases}$$

unde $x_1, x_2, \ldots, x_n : I \to \mathbb{R}$ *sunt funcţiile necunoscute,* $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn} \in \mathbb{R}$ *sunt coeficienţi, iar* $f_1, f_2, \ldots, f_n : I \to \mathbb{R}$ *sunt funcţii continue pe intervalul* I*.*

Cu notaţiile

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix},$$

sistemul se poate scrie matriceal sub forma

$$X' = AX + F.$$

Dacă $F \equiv 0$*, sistemul se numeşte* **omogen***, în timp ce dacă* $F \not\equiv 0$ *sistemul se numeşte* **neomogen***.*

Observaţie. De remarcat faptul că numărul de ecuaţii trebuie să fie egal cu numărul de (funcţii) necunoscute, iar membrii drepţi trebuie să fie funcţii de gradul 1 (liniare) în fiecare dintre necunoscute.

Exemplul 1.1. Sistemul $\begin{cases} x_1' = 3x_1 + x_2 \\ x_2' = x_1 - 5x_2 \end{cases}$ este un sistem de ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul 1 cu coeficienţi constanţi omogen, în timp ce sistemul $\begin{cases} x_1' = -4x_1 + 5x_2 \\ x_2' = 3x_1 + 5x_2 + e^t \end{cases}$ este un sistem de ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul 1 cu coeficienţi constanţi neomogen.

Sistemul $\begin{cases} x_1' = 2x_1 + 3x_2 \\ x_2' = 4x_1 + 5x_2^2 \end{cases}$ nu este un sistem de forma de mai sus, din cauza prezenţei lui x_2^2. Nici sistemul $\begin{cases} x_1' = -x_1 + x_2 \\ x_2'' = 3x_1 - x_2 \end{cases}$ nu este un sistem de forma de mai sus, din cauza prezenţei lui x_2''.

Vom începe cu rezolvarea sistemelor de ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul 1 cu coeficienţi constanţi omogene.

1.1 Sisteme de ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul 1 cu coeficienţi constanţi omogene

Studiem în cele ce urmează sistemul

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{cases}, \tag{SDO}$$

unde $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn} \in \mathbb{R}$, iar $x_1, x_2, \ldots, x_n : I \to \mathbb{R}$ sunt funcţiile necunoscute.

1.1.1 Metode de rezolvare a (SDO)

Metoda eliminării

Prin intermediul acestei metode, rezolvăm (SDO) reducându-l mai întâi la o ecuaţie diferenţială de ordinul n (acelaşi cu numărul de ecuaţii din sistem) într-una singură dintre necunoscute (x_1, în cele de mai jos). Celelalte necunoscute vor fi apoi exprimate în funcţie de aceasta şi de derivatele ei. Folosim procedeele de **derivare** şi **înlocuire**.

Pasul 1: Calculul derivatelor
În acest scop, derivăm prima ecuaţie şi înlocuim apoi x_2', x_3', ..., x_n' (nu şi x_1', derivata necunoscutei cu care lucrăm). Obţinem

$$\begin{aligned} x_1'' &= a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + \ldots + a_{1n}x_n' \\ &= a_{11}x_1' + a_{12}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n) + \ldots + a_{1n}(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n), \end{aligned}$$

adică

$$x_1'' = F_2(x_1', x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

această egalitate descriind faptul că x_1'' este exprimat în funcţie de $x_1', x_1, x_2, \ldots, x_n$. Din nou, această ecuaţie se derivează şi se înlocuiesc x_2', x_3', ... x_n'. Se obţine

$$x_1''' = F_3(x_1'', x_1', x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Se continuă procedeul până când se ajunge la derivata de ordinul n a lui x_1 şi obţine

$$x_1^{(n)} = F_n(x_1^{(n-1)}, x_1^{(n-2)}, \ldots, x_1', x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Pasul 2: Formarea sistemului cu derivate
Rezultatele obţinute (expresiile tuturor derivatelor lui x_1 de până la ordinul n, egal cu

numărul de necunoscute şi cu numărul de ecuaţii din sistemul iniţial) se privesc ca un sistem, sub forma

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ x_1'' = F_2(x_1', x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ x_1''' = F_3(x_1'', x_1', x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ x_1^{(n)} = F_n(x_1^{(n-1)}, x_1^{(n-2)}, \ldots, x_1', x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{cases}$$

Pasul 3: Obţinerea ecuaţiei rezolvante
Din primele $n-1$ ecuaţii se determină $x_2, x_3, \ldots, x_n$ ca funcţii de x_1 şi derivatele sale. Acestea se înlocuiesc în ultima ecuaţie, obţinându-se o ecuaţie diferenţială cu coeficienţi constanţi în necunoscuta x_1.

Pasul 4: Rezolvarea ecuaţiei şi determinarea uneia din funcţiiile necunoscute
Această ecuaţie se rezolvă prin metoda cunoscută, găsindu-se astfel x_1.

Pasul 5: Determinarea celorlalte funcţii necunoscute
Celelalte funcţii necunoscute $x_2, x_3, \ldots, x_n$ se determină utilizând expresiile acestora ca funcţii de x_1 şi derivatele sale determinate mai sus.

Observaţie. Această metodă se mai numeşte şi **metoda ecuaţiei rezolvante**, întrucât, în primă instanţă, rezolvarea sistemului se reduce la rezolvarea unei ecuaţii de ordin superior.

Exemplul 1.2. Rezolvaţi sistemul $\begin{cases} x' = x - 3y \\ y' = 3x - 5y \end{cases}$ cu condiţiile iniţiale $\begin{cases} x(0) = 2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

Soluţie. Intenţionăm să obţinem o ecuaţie de ordinul al doilea în necunoscuta x. Derivând prima ecuaţie şi înlocuindu-l pe y', obţinem

$$x'' = (x-3y)' \implies x'' = x' - 3y' \implies x'' = x' - 3(3x - 5y)$$
$$\implies x'' = x' - 9x + 15y.$$

Nu mai este necesar calculul vreunei alte derivate a lui x, întrucât sistemul iniţial are dimensiunea 2. Obţinem deci sistemul

$$\begin{cases} x' = x - 3y \\ x'' = x' - 9x + 15y, \end{cases}$$

Pentru fi obţinută o ecuaţie în x, este necesar să fie eliminat y. Din prima ecuaţie, se obţine că $y = \frac{-x'+x}{3}$, deci, prin înlocuire în cea de-a doua ecuaţie,

$$x'' = x' - 9x + 15\frac{-x'+x}{3} \implies x'' = x' - 9x + 5(-x'+x) \implies x'' = -4x' - 4x,$$

şi atunci

$$x'' + 4x' + 4x = 0,$$

ecuaţie cu soluţia

$$x = C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t}.$$

Rămâne deci să-l determinăm şi pe y. Folosind relaţia

$$y = \frac{-x' + x}{3},$$

urmează că

$$\begin{aligned}
y &= \frac{-(C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t})' + C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t}}{3} \\
&= \frac{1}{3}\left[-(C_1 e^{-2t}(-2) + C_2 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t}(-2)) + C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t}\right] \\
&= C_1 e^{-2t} - \frac{1}{3} C_2 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t}.
\end{aligned}$$

Folosim acum condiţiile iniţiale. Atunci

$$x = C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t} \implies x(0) = C_1 \implies 2 = C_1$$

şi

$$y = C_1 e^{-2t} - \frac{1}{3} C_2 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t} \implies y(0) = C_1 - \frac{1}{3} C_2 \implies 1 = C_1 - \frac{1}{3} C_2.$$

Deoarece $C_1 = 2$, urmează că $C_2 = 3$, şi atunci

$$\begin{cases} x = 2e^{-2t} + 3te^{-2t} \\ y = 2e^{-2t} - e^{-2t} + 3te^{-2t} \end{cases} \implies \begin{cases} x = 2e^{-2t} + 3te^{-2t} \\ y = e^{-2t} + 3te^{-2t} \end{cases}.$$

Exemplul 1.3. Rezolvaţi sistemul

$$\begin{cases} x_1' = 3x_1 - x_2 + x_3 \\ x_2' = x_1 + x_2 + x_3 \\ x_3' = 4x_1 - x_2 + 4x_3 \end{cases}.$$

Soluţie. Intenţionăm să obţinem o ecuaţie de ordinul al doilea în necunoscuta x_1. Derivând prima ecuaţie şi înlocuind x_2', x_3', obţinem

$$\begin{aligned}
x_1'' &= 3x_1' - x_2' + x_3' \\
&= 3x_1' - (x_1 + x_2 + x_3) + (4x_1 - x_2 + 4x_3) \\
&= 3x_1' + 3x_1 - 2x_2 + 3x_3.
\end{aligned}$$

Este necesar calculul încă unei derivate, deoarece ordinul sistemului iniţial este 3. Derivăm şi această ecuaţie şi obţinem

$$x_1''' = 3x_1'' + 3x_1' - 2x_2' + 3x_3'$$

$$
\begin{aligned}
&= 3x_1'' + 3x_1' - 2(x_1 + x_2 + x_3) + 3(4x_1 - x_2 + 4x_3) \\
&= 3x_1'' + 3x_1' + 10x_1 - 5x_2 + 10x_3.
\end{aligned}
$$

Rezolvăm acum sistemul

$$
\begin{cases}
x_1' = 3x_1 - x_2 + x_3 \\
x_1'' = 3x_1' + 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 \\
x_1''' = 3x_1'' + 3x_1' + 10x_1 - 5x_2 + 10x_3.
\end{cases} \tag{1.1}
$$

Determinăm x_2, x_3 din primele două ecuaţii. Urmează că

$$
\begin{cases}
-x_2 + x_3 = x_1' - 3x_1 \\
-2x_2 + 3x_3 = x_1'' - 3x_1' - 3x_1
\end{cases}
$$

de unde

$$
\begin{cases}
x_2 = x_1'' - 6x_1' + 6x_1 \\
x_3 = x_1'' - 5x_1' + 3x_1
\end{cases}. \tag{1.2}
$$

Înlocuind aceste relaţii în a treia ecuaţie din (1.1), obţinem

$$
\begin{aligned}
x_1''' &= 3x_1'' + 3x_1' + 10x_1 - 5(x_1'' - 6x_1' + 6x_1) + 10(x_1'' - 5x_1' + 3x_1) \\
&= 8x_1'' - 17x_1' + 10x_1,
\end{aligned}
$$

de unde

$$x_1''' - 8x_1'' + 17x_1' - 10x_1 = 0.$$

Ecuaţia caracteristică este

$$\lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 10 = 0,$$

cu rădăcinile $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 5$. Atunci

$$x_1 = C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{5t}.$$

Înlocuind în (1.2), obţinem

$$
\begin{aligned}
x_2 &= x_1'' - 6x_1' + 6x_1 \\
&= (C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{5t})'' - 6(C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{5t})' + 6(C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{5t}) \\
&= C_1e^t - 2C_2e^{2t} + C_3e^{5t}
\end{aligned}
$$

şi, de asemenea,

$$
\begin{aligned}
x_3 &= x_1'' - 5x_1' + 3x_1 \\
&= (C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{5t})'' - 5(C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{5t})' + 3(C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{5t}) \\
&= -C_1e^t - 3C_2e^{2t} + 3C_3e^{5t}.
\end{aligned}
$$

Observaţie. Sub formă matriceală, putem scrie

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{5t} \\ C_1e^t - 2C_2e^{2t} + C_3e^{5t} \\ -C_1e^t - 3C_2e^{2t} + 3C_3e^{5t} \end{pmatrix} = C_1e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + C_3e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

formă asemănătoare cu forma soluţiei unei **ecuaţii** diferenţiale, diferenţa fiind dată de prezenţa vectorilor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Probleme propuse. Rezolvaţi următoarele sisteme de ecuaţii diferenţiale cu coeficienţi constanţi omogene folosind metoda eliminării

1.
$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = -4x + y \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} x' = -2x + y \\ y' = -4x + 3y \end{cases} \quad \text{cu condiţiile iniţiale} \begin{cases} x(0) = 2 \\ y(0) = 4 \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} x' = -x + 2y + 2z \\ y' = 2x + 2y + 2z \\ z' = -3x - 6y - 6z \end{cases}$$

Metoda matriceală

Teorema 1.1. *Mulţimea soluţiilor unui sistem de ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul* 1 *cu coeficienţi constanţi omogen este un spaţiu liniar de dimensiune n.*

Se scrie mai întâi sistemul sub forma matriceală $X' = AX$ şi se determină valorile proprii $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ale matricei A.
Cazul I Dacă valorile proprii $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sunt simple, atunci soluţia sistemului se poate scrie (matriceal) sub forma

$$X = C_1e^{\lambda_1 t}V_1 + C_2e^{\lambda_2 t}V_2 + \ldots + C_ne^{\lambda_n t}V_n,$$

unde $V_1, V_2, \ldots, V_n$ sunt vectori proprii (fixaţi) corespunzători valorilor proprii $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, iar $C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathbb{R}$.

Exemplul 1.4. Rezolvaţi sistemul $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = x + 2y \end{cases}$

Soluţie. Matricea sistemului este $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Determinăm mai întâi valorile proprii ale acestei matrice. Ecuaţia caracteristică $\det(A - \lambda I_2) = 0$ revine la

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

(pe diagonala principală a matricei se scade λ; în afara diagonalei nu se scade nimic; egalăm determinantul cu 0) adică $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$, cu rădăcinile $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$. Observăm că aceste rădăcini sunt reale şi simple.

Determinăm acum baze în spaţiile proprii asociate valorilor proprii.

Începem cu $\lambda_1 = 1$, determinând subspaţiul propriu corespunzător $S(1)$. Ecuaţia matriceală de rezolvat este

$$\begin{pmatrix} 2-1 & 1 \\ 1 & 2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(scădem, tot pe diagonala principală, valoarea proprie cu care lucrăm, $\lambda_1 = 1$; deoarece dorim să determinăm **vectori** proprii, egalăm cu 0 "**vector**"). Urmează că

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} v_1 + v_2 = 0 \\ v_1 + v_2 = 0 \end{cases}.$$

Se poate renunţa la cea de-a doua ecuaţie (de notat că sistemul obţinut pentru determinarea vectorilor proprii trebuie să fie totdeauna **compatibil nedeterminat**, deci numărul de ecuaţii "utile" va fi totdeauna mai mic decât numărul de necunoscute).

Urmează că ecuaţia matriceală se reduce la

$$v_1 + v_2 = 0 \implies v_2 = -v_1,$$

ceea ce conduce la

$$S(1) = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ -v_1 \end{pmatrix} ; v_1 \in \mathbb{R}, \right\}.$$

O bază în $S(1)$ este deci $B_1 = \left\{ V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$, obţinută pentru $v_1 = 1$.

Continuăm cu $\lambda_2 = 3$, determinând subspaţiul propriu corespunzător $S(3)$. Ecuaţia matriceală de rezolvat este

$$\begin{pmatrix} 2-3 & 1 \\ 1 & 2-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(scădem pe diagonala principală, valoarea proprie cu care lucrăm, $\lambda_2 = 3$). Urmează că

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} -v_1 + v_2 = 0 \\ v_1 - v_2 = 0 \end{cases}.$$

Se poate renunţa la cea de-a doua ecuaţie, care este de fapt prima ecuaţie înmulţită cu -1.

Urmează că ecuaţia matriceală se reduce la

$$-v_1 + v_2 = 0 \implies v_2 = v_1,$$

ceea ce conduce la

$$S(3) = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_1 \end{pmatrix}; v_1 \in \mathbb{R}, \right\}.$$

O bază în $S(3)$ este deci $B_2 = \left\{ V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, obţinută pentru $v_1 = 1$.

Atunci

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} V_2 \implies \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\implies \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^{t} + C_2 e^{3t} \\ -C_1 e^{t} + C_2 e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Observaţie. De notat că dacă λ este valoare proprie **complexă**, un vector propriu al său fiind V, atunci şi $\overline{\lambda}$ este valoare proprie, un vector propriu al său fiind $\overline{V}$. Pentru evitarea lucrului cu numere complexe, în loc de $e^{\lambda t} V$ şi $e^{\overline{\lambda} t} \overline{V}$ putem folosi în formula de reprezentare a soluţiei $\operatorname{Re}\left(e^{\lambda t} V\right)$ şi $\operatorname{Im}\left(e^{\lambda t} V\right)$.

Observaţie. Pot fi demonstrate urmatoarele afirmaţii.

1. Dacă A este o matrice pătratică de ordinul 2, atunci ecuaţia sa caracteristică este

$$(-1)^2(\lambda^2 - \operatorname{Tr} A \cdot \lambda + \det A) = 0.$$

2. Dacă A este o matrice pătratică de ordinul 3, atunci ecuaţia sa caracteristică este

$$(-1)^3(\lambda^3 - \operatorname{Tr} A \cdot \lambda^2 + s(A) \cdot \lambda - \det A) = 0.$$

În cele de mai sus, $\operatorname{Tr} A$ este suma elementelor de pe diagonala principală a matricei A, iar $s(A)$ este suma complemenţilor algebrici ai elementelor de pe diagonala principală a matricei A.

Probleme propuse. Rezolvaţi următoarele sisteme de ecuaţii diferenţiale cu coeficienţi constanţi omogene folosind metoda matriceală

1.

$$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 4x + 3y \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -2x + 4y \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} x_1' = 3x_2 - 4x_3 \\ x_2' = -x_3 \\ x_3' = -2x_1 + x_2 \end{cases}$$

Matematici Aplicate, Curs 10

(cu probleme de rezolvat la curs)

Sisteme de ecuaţii diferenţiale

1 Sisteme de ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul 1 cu coeficienţi constanţi (continuare)

1.1 Sisteme de ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul 1 cu coeficienţi constanţi omogene

Studiem în cele ce urmează sistemul

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{cases}, \tag{SDO}$$

unde a_{11}, $a_{12}, \ldots, a_{nn} \in \mathbb{R}$, iar $x_1, x_2, \ldots, x_n : I \to \mathbb{R}$ sunt funcţiile necunoscute. Se scrie mai întâi sistemul sub forma matriceală $X' = AX$ şi se determină valorile proprii $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ale matricei A.

Cazul II Dacă valorile proprii $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ nu sunt neapărat distincte, dar totuşi matricea A este diagonalizabilă, atunci de asemenea

$$X = C_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} V_2 + \ldots + C_n e^{\lambda_n t} V_n,$$

unde $V_1, V_2, \ldots, V_n$ sunt vectori proprii corespunzători valorilor proprii $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ astfel încât $B = \{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$ este o bază care diagonalizează matricea A, iar $C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathbb{R}$.

Exemplul 1.1. Rezolvaţi sistemul

$$\begin{cases} x_1' = -2x_1 + x_2 - 2x_3 \\ x_2' = x_1 - 2x_2 + 2x_3 \\ x_3' = 3x_1 - 3x_2 + 5x_3 \end{cases}.$$

Soluţie. Matricea sistemului este $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$. Ecuaţia caracteristică revine la

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & -2 \\ 1 & -2-\lambda & 2 \\ 3 & -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \implies -(\lambda^3 - \lambda^2 - 5\lambda - 3) = 0$$
$$\implies \lambda^3 - \lambda^2 - 5\lambda - 3 = 0.$$

Căutând rădăcinile întregi ale ecuaţiei printre divizorii termenului liber, observăm că $\lambda_1 = -1$ este una dintre rădăcini. Pentru a determina celelalte două rădăcini, folosim schema lui Horner.

λ^3	λ^2	λ^1	1
1	-1	-5	-3
1	-1+1· (-1)=-2	-5+(-2)· (-1)=-3	-3+(-3)·(-1) =0

Celelalte două rădăcini sunt soluţii ale ecuaţiei $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$, de unde $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 3$. Observăm atunci că -1 este rădăcină dublă (multiplicitatea algebrică $m(-1)$ este 2), în timp ce 3 este rădăcină simplă (multiplicitatea algebrică $m(3)$ este 1).

Pentru a verifica dacă matricea A este diagonalizabilă, determinăm multiplicităţile geometrice $n(-1)$ şi $n(3)$.

Determinâm mai întâi $S(-1)$. Ecuaţia matriceală de rezolvat este

$$\begin{pmatrix} -2-(-1) & 1 & -2 \\ 1 & -2-(-1) & 2 \\ 3 & -3 & 5-(-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\implies \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\implies \begin{cases} -v_1 + v_2 - 2v_3 = 0 \\ v_1 - v_2 + 2v_3 = 0 \\ 3v_1 - 3v_2 + 6v_3 = 0 \end{cases}$$

Înmulţind prima ecuaţie cu -1 şi împărţind a treia ecuaţie la 3, obţinem că

$$\begin{cases} v_1 - v_2 + 2v_3 = 0 \\ v_1 - v_2 + 2v_3 = 0 \\ v_1 - v_2 + 2v_3 = 0 \end{cases}$$

Se poate renunţa la ultimele două ecuaţii. Urmează că ecuaţia matriceală se reduce la

$$v_1 - v_2 + 2v_3 = 0 \implies v_1 = v_2 - 2v_3,$$

(v_1 necunoscută principală, v_2, v_3 necunoscute secundare), ceea ce conduce la

$$S(-1) = \left\{ \begin{pmatrix} v_2 - 2v_3 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}; v_2, v_3 \in \mathbb{R}, \right\}.$$

şi la $n(-1) = 2$ (multiplicitatea geometrică a lui -1, respectiv dimensiunea lui $S(-1)$).

O bază în $S(-1)$ este $B_1 = \left\{ V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, primul vector fiind obţinut pentru $v_2 = 1$, $v_3 = 0$, iar cel de-al doilea fiind obţinut pentru $v_2 = 0$, $v_3 = 1$.

Determinâm acum $S(3)$. Ecuaţia matriceală de rezolvat este

$$\begin{pmatrix} -2-3 & 1 & -2 \\ 1 & -2-3 & 2 \\ 3 & -3 & 5-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\implies \begin{pmatrix} -5 & 1 & -2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\implies \begin{cases} -5v_1 + v_2 - 2v_3 = 0 \\ v_1 - 5v_2 + 2v_3 = 0 \\ 3v_1 - 3v_2 + 2v_3 = 0 \end{cases}$$

Nu este evident ce ecuaţie trebuie eliminată. Cum matricea sistemului rezultat este

$$B = \begin{pmatrix} -5 & 1 & -2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \text{ cu } \begin{vmatrix} -5 & 1 & -2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 24 \neq 0,$$

urmează că $\operatorname{rang} B = 2$, vor fi păstrate primele două ecuaţii, iar necunoscutele principale sunt v_1 şi v_2, v_3 fiind necunoscută secundară.

Atunci ecuaţia matriceală se reduce la

$$\begin{cases} -5v_1 + v_2 - 2v_3 = 0 \\ v_1 - 5v_2 + 2v_3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} -5v_1 + v_2 = 2v_3 \\ v_1 - 5v_2 = -2v_3 \end{cases}$$

(deoarece v_3 este necunoscută secundară), ceea ce conduce la

$$\begin{cases} v_1 = -\dfrac{1}{3} v_3 \\ v_2 = \dfrac{1}{3} v_3 \end{cases}.$$

De aici

$$S(3) = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} v_3 \\ \frac{1}{3} v_3 \\ v_3 \end{pmatrix}; v_2, v_3 \in \mathbb{R}, \right\}.$$

şi la $n(3) = 1$ (multiplicitatea geometrică a lui 3, respectiv dimensiunea lui $S(3)$).

O bază în $S(3)$ este $B_2 = \left\{ V_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, vectorul fiind obţinut pentru $v_3 = 1$.

Deoarece $m(-1) = n(-1)(= 2)$, iar $m(3) = n(3)(= 1)$, urmează că matricea A este diagonalizabilă. Atunci

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= C_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} V_2 + C_3 e^{\lambda_3 t} V_3 \\
\Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{3t} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \\
\Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{-t} - \frac{1}{3} C_3 e^{3t} \\ C_1 e^{-t} + \frac{1}{3} C_3 e^{3t} \\ C_2 e^{-t} + C_3 e^{3t} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Observaţie. Ordonarea rădăcinilor şi bazele alese în fiecare subspaţiu nu sunt esenţiale. De exemplu, pentru evitarea lucrului cu fracţii, o altă bază în $S(3)$ putea fi $B_2' = \left\{ V_3' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$, V_3' fiind un multiplu al lui V_3.

Probleme propuse. Rezolvaţi următoarele sisteme de ecuaţii diferenţiale cu coeficienţi constanţi omogene

1.
$$\begin{cases} x' = 2x + y + z \\ y' = x + 2y + z \\ z' = x + y + 2z \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} x' = -x + y + z \\ y' = x - y + z \\ z' = x + y - z \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} x' = 5x + 8y + 16z \\ y' = 4x + y + 8z \\ z' = -4x - 4y - 11z \end{cases}$$

Cazul III Dacă matricea A nu este diagonalizabilă, rezolvarea "programatică" ar utiliza noţiuni privind forma Jordan a unei matrice, lucru care excede constrângerile curente ale cursului. Menţionăm una dintre abordările posibile:

Porţiunea din soluţie corespunzătoare unei rădăcini multiple λ_i cu ordin de multiplicitate m_i se caută sub forma

$$X_i = \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ \vdots \\ P_n(t) \end{pmatrix} e^{\lambda_i t},$$

unde $P_1, P_2, \ldots, P_n$ sunt polinoame de grad $m_i - 1$ cu coeficienţi nedeterminaţi. Relaţiile între aceşti coeficienţi se determină prin înlocuirea componentelor soluţiei în sistemul diferenţial iniţial şi identificarea unor coeficienţi în egalităţile rezultate.

Exemplul 1.2. Rezolvaţi sistemul

$$\begin{cases} x' = x - 4y \\ y' = 4x - 7y \end{cases}.$$

Soluţie. Matricea sistemului este $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$. Determinăm mai întâi valorile proprii ale acestei matrice. Ecuaţia caracteristică revine la

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 \\ 4 & -7-\lambda \end{vmatrix} = 0, \implies (1-\lambda)(-7-\lambda) + 16 = 0 \implies \lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0,$$

cu rădăcinile $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$. Observăm că -3 este rădăcină dublă, adică $m(-3) = 2$.

Determinăm acum subspaţiul propriu corespunzător $S(-3)$. Ecuaţia matriceală de rezolvat este

$$\begin{pmatrix} 1-(-3) & -4 \\ 4 & -7-(-3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Urmează că

$$\begin{cases} 4v_1 - 4v_2 = 0 \\ 4v_1 - 4v_2 = 0 \end{cases}.$$

Se poate renunţa la cea de-a doua ecuaţie, iar ecuaţia matriceală se reduce la

$$4v_1 - 4v_2 = 0 \implies v_1 - v_2 = 0 \implies v_2 = v_1,$$

ceea ce conduce la

$$S(-3) = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_1 \end{pmatrix}; v_1 \in \mathbb{R}, \right\}.$$

Cum dimensiunea lui $S(-3)$ este atunci 1, urmează că $n(-3) = 1$. Deoarece $m(-3) = 2$, urmează că $m(-3) \neq n(-3)$, iar A nu este diagonalizabilă.

Căutăm atunci soluţia sub forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{pmatrix} e^{-3t},$$

unde P_1, P_2 sunt polinoame de gradul $m(-3) - 1$, adică de gradul 1, cu coeficienţi nedeterminaţi.

Observaţie. De notat că doar -3 este valoare proprie, la această expresie nefiind deci necesar să se adauge termeni corespunzând altor valori proprii.

Atunci
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at+b \\ ct+d \end{pmatrix} e^{-3t} \implies \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (at+b)e^{-3t} \\ (ct+d)e^{-3t} \end{pmatrix}.$$

Înlocuind x şi y în sistemul iniţial, obţinem

$$\begin{cases} \left((at+b)e^{-3t}\right)' = (at+b)e^{-3t} - 4(ct+d)e^{-3t} \\ \left((ct+d)e^{-3t}\right)' = 4(at+b)e^{-3t} - 7(ct+d)e^{-3t} \end{cases}$$
$$\implies \begin{cases} ae^{-3t} - 3(at+b)e^{-3t} = (at+b)e^{-3t} - 4(ct+d)e^{-3t} \\ ce^{-3t} - 3(ct+d)e^{-3t} = 4(at+b)e^{-3t} - 7(ct+d)e^{-3t} \end{cases}.$$

După simplificarea lui e^{-3t} obţinem

$$\begin{cases} a - 3(at+b) = (at+b) - 4(ct+d) \\ c - 3(ct+d) = 4(at+b) - 7(ct+d) \end{cases}$$

de unde, grupând după puterile lui t, obţinem

$$\begin{cases} (a-3b) - 3at = (b-4d) + (a-4c)t \\ (c-3d) - 3ct = (4b-7d) + (4a-7c)t \end{cases}.$$

Prin identificarea coeficienţilor în cei doi membri, obţinem

$$\begin{cases} (a-3b) = (b-4d), \quad -3a = (a-4c) \\ (c-3d) = (4b-7d), \quad -3c = (4a-7c) \end{cases}.$$

De aici, prin gruparea termenilor asemenea, obţinem

$$\begin{cases} a - 4b = -4d, \quad -4a = -4c \\ c + 4d = 4b, \qquad 4c = 4a \end{cases} \implies \begin{cases} a = 4b - 4d, \quad a = c \\ c = 4b - 4d, \quad c = a \end{cases}.$$

Putem păstra atunci doar două egalităţi, anume

$$a = 4b - 4d, \quad a = c.$$

Determinăm a, b în funcţie de c, d (era posibil, desigur, şi invers!). Cum $a = c$, urmează că
$$4b = a + 4d \implies 4b = c + 4d \implies b = d + \frac{c}{4}.$$

Deoarece
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at+b \\ ct+d \end{pmatrix} e^{-3t},$$

urmează că

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct + d + \frac{c}{4} \\ ct + d \end{pmatrix} e^{-3t},$$

ceea ce încheie rezolvarea problemei.

Observaţie. Deoarece lipsesc condiţiile iniţiale, c şi d rămân nedeterminate, fiind normal ca soluţia unui sistem de **2** ecuaţii de tipul rezolvat să depindă tot de **2** constante.

Probleme propuse. Rezolvaţi următoarele sisteme de ecuaţii diferenţiale cu coeficienţi constanţi omogene

1.
$$\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = -x + y \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} x' = 6x - y \\ y' = x + 4y \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} x' = x + 2y - 3z \\ y' = x + y + 2z \\ z' = x - y + 4z \end{cases}$$

Matematici Aplicate, Curs 11

(cu probleme de rezolvat la curs)

Sisteme de ecuaţii diferenţiale

1 Sisteme de ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul 1 cu coeficienţi constanţi (continuare)

1.1 Sisteme de ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul 1 cu coeficienţi constanţi neomogene

Studiem în cele ce urmează sistemul

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + f_1(t) \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + f_2(t) \\ \;\vdots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + f_n(t) \end{cases}$$

unde $x_1, x_2, \ldots, x_n : I \to \mathbb{R}$ sunt funcţiile necunoscute, a_{11}, $a_{12}, \ldots, a_{nn} \in \mathbb{R}$ sunt coeficienţi, iar $f_1, f_2, \ldots, f_n : I \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue pe intervalul I.

Cu notaţiile

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix},$$

sistemul se poate scrie matriceal sub forma

$$X' = AX + F.$$

Pentru rezolvarea acestui sistem, ca şi în cazul ecuaţiilor, determinăm mai întâi soluţia generală a sistemului omogen, căreia îi adăugăm o soluţie particulară a sistemului neomogen.

Mai precis, dacă este cunoscută o bază $B = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ în spaţiul soluţiilor sistemului omogen, atunci o soluţie particulară a sistemului neomogen se va căuta folosind metoda variaţiei constantelor, de forma

$$X_P = \gamma_1(t)X_1(t) + \gamma_2(t)X_2(t) + \ldots + \gamma_n(t)X_n(t),$$

unde $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ se determină (până la o constantă) din condiţia ca X_P să fie soluţie a sistemului iniţial.

Exemplul 1.1. Rezolvaţi sistemul

$$\begin{cases} x_1' = -x_1 + 3x_2 + 2e^t \\ x_2' = -2x_1 + 4x_2 + e^t \end{cases}.$$

Soluţie. Rezolvăm mai întâi sistemul omogen asociat

$$\begin{cases} x_1' = -x_1 + 3x_2 \\ x_2' = -2x_1 + 4x_2 \end{cases}.$$

Matricea sistemului este $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$. Determinăm mai întâi valorile proprii ale acestei matrice. Ecuaţia caracteristică revine la

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0, \implies (-1-\lambda)(4-\lambda) + 6 = 0 \implies \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0,$$

cu rădăcinile $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Observăm că aceste rădăcini sunt reale şi simple.

Determinăm acum baze în spaţiile proprii asociate valorilor proprii.

Începem cu $\lambda_1 = 1$, determinând subspaţiul propriu corespunzător $S(1)$. Ecuaţia matriceală de rezolvat este

$$\begin{pmatrix} -1-1 & 3 \\ -2 & 4-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Urmează că

$$\begin{cases} -2v_1 + 3v_2 = 0 \\ -2v_1 + 3v_2 = 0 \end{cases}.$$

Se poate renunţa la cea de-a doua ecuaţie, iar ecuaţia matriceală se reduce la

$$-2v_1 + 3v_2 = 0 \implies v_2 = \frac{2}{3}v_1,$$

ceea ce conduce la

$$S(1) = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ \frac{2}{3}v_1 \end{pmatrix}; v_1 \in \mathbb{R}, \right\}.$$

O bază în $S(1)$ este deci $B_1 = \left\{ V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \right\}$, obţinută pentru $v_1 = 1$. Continuăm cu $\lambda_2 = 2$, determinând subspaţiul propriu corespunzător $S(2)$. Ecuaţia matriceală de rezolvat este

$$\begin{pmatrix} -1-2 & 3 \\ -2 & 4-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Urmează că

$$\begin{cases} -3v_1 + 3v_2 = 0 \\ -2v_1 + 2v_2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} -v_1 + v_2 = 0 \\ -v_1 + v_2 = 0 \end{cases}.$$

Se poate renunţa la cea de-a doua ecuaţie, iar ecuaţia matriceală se reduce la

$$-v_1 + v_2 = 0 \implies v_2 = v_1,$$

ceea ce conduce la

$$S(2) = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_1 \end{pmatrix}; v_1 \in \mathbb{R}, \right\}.$$

O bază în $S(2)$ este deci $B_2 = \left\{ V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, obţinută pentru $v_1 = 1$. Atunci soluţia sistemului omogen este

$$X_O = C_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} V_2 \implies X_O = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\implies X_O = \begin{pmatrix} C_1 e^t + C_2 e^{2t} \\ \frac{2}{3} C_1 e^t + C_2 e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Căutăm atunci soluţia particulară X_P a sistemului neomogen sub forma

$$X_P = \gamma_1(t) e^t \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} + \gamma_2(t) e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \implies X_P = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) e^t + \gamma_2(t) e^{2t} \\ \frac{2}{3} \gamma_1(t) e^t + \gamma_2(t) e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Punând condiţia ca X_P să fie soluţie a sistemului neomogen, obţinem

$$\begin{cases} \left(\gamma_1(t) e^t + \gamma_2(t) e^{2t}\right)' = -\left(\gamma_1(t) e^t + \gamma_2(t) e^{2t}\right) + 3\left(\frac{2}{3}\gamma_1(t) e^t + \gamma_2(t) e^{2t}\right) + 2e^t \\ \left(\frac{2}{3}\gamma_1(t) e^t + \gamma_2(t) e^{2t}\right)' = -2\left(\gamma_1(t) e^t + \gamma_2(t) e^{2t}\right) + 4\left(\frac{2}{3}\gamma_1(t) e^t + \gamma_2(t) e^{2t}\right) + e^t \end{cases}.$$

Obţinem atunci

$$\begin{cases} \gamma_1'(t) e^t + \cancel{\gamma_1(t) e^t} + \gamma_2'(t) e^{2t} + \cancel{\gamma_2(t) 2e^{2t}} = \cancel{-\gamma_1(t) e^t} \cancel{-\gamma_2(t) e^{2t}} + \cancel{2\gamma_1(t) e^t} + \cancel{3\gamma_2(t) e^{2t}} + 2e^t \\ \frac{2}{3}\gamma_1'(t) e^t + \cancel{\frac{2}{3}\gamma_1(t) e^t} + \gamma_2'(t) e^{2t} + \cancel{\gamma_2(t) 2e^{2t}} = \cancel{-2\gamma_1(t) e^t} \cancel{-2\gamma_2(t) e^{2t}} + \cancel{\frac{8}{3}\gamma_1(t) e^t} + \cancel{4\gamma_2(t) e^{2t}} + e^t, \end{cases}$$

deci

$$\begin{cases} \gamma_1'(t) e^t + \gamma_2'(t) e^{2t} = 2e^t \\ \frac{2}{3}\gamma_1'(t) e^t + \gamma_2'(t) e^{2t} = e^t. \end{cases}$$

De aici,

$$\frac{1}{3}\gamma_1'(t) e^t = e^t \implies \gamma_1'(t) = 3 \implies \gamma_1(t) = \int 3dt = 3t$$

(avem nevoie de **o singură** funcţie γ_1). Înlocuind în prima ecuaţie, obţinem

$$\gamma_2'(t) e^{2t} = 2e^t - 3e^t \implies \gamma_2'(t) e^{2t} = -e^t \implies \gamma_2'(t) = -e^{-t}$$

$$\Longrightarrow \gamma_2(t) = \int -e^{-t}dt \Longrightarrow \gamma_2(t) = e^{-t}.$$

(din nou, avem nevoie de **o singură** funcţie γ_2). Substituind $\gamma_1(t)$ şi $\gamma_2(t)$ astfel determinate în expresia lui X_P, obţinem

$$X_P = 3te^t \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} + e^{-t}e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow X_P = te^t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow X_P = \begin{pmatrix} e^t(3t+1) \\ e^t(2t+1) \end{pmatrix}.$$

Soluţia generală a sistemului neomogen este atunci

$$\begin{aligned} X_N &= X_O + X_P \\ &= \begin{pmatrix} C_1e^t + C_2e^{2t} \\ \frac{2}{3}C_1e^t + C_2e^{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t(3t+1) \\ e^t(2t+1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} C_1e^t + C_2e^{2t} + e^t(3t+1) \\ \frac{2}{3}C_1e^t + C_2e^{2t} + e^t(2t+1) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Observaţie. Alternativ, pentru rezolvarea sistemelor neomogene se poate folosi şi metoda eliminării.

Probleme propuse. Rezolvaţi următoarele sisteme

1.
$$\begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2 + e^{-2t} \\ x_2' = 4x_1 - x_2 \end{cases}.$$

2.
$$\begin{cases} x_1' = 3x_1 - x_2 + 2e^t \\ x_2' = 5x_1 - 3x_2 + 14e^t \end{cases}.$$

3.
$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 - x_2 + e^t \\ x_2' = 3x_1 - 2x_2 + t \end{cases}.$$

Matematici Aplicate, Curs 12-13-14

(cu probleme de rezolvat la curs)

Transformata Laplace

1 Noţiuni introductive

O altă metodă generală de rezolvare a unor ecuaţii diferenţiale sau integrale (şi nu numai!) este reducerea acestora la ecuaţii algebrice prin aplicarea unor transformări specifice. O astfel de transformare este **transformarea (transformata) Laplace**. Desigur, conform unui principiu universal al conservării dificultăţii, trecerea de la soluţiile ecuaţiilor algebrice asociate înapoi la soluţiile ecuaţiilor iniţiale poate prezenta anumite dificultăţi.

Mai întâi trebuie precizat căror funcţii li se poate aplica această transformare.

1.1 Funcţii original

Definiţia 1.1. *O funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se numeşte* **funcţie original** *dacă sunt satisfăcute următoarele condiţii:*

1. $f(t) = 0$ *pentru* $t < 0$.
2. f *este continuă sau măcar continuă pe porţiuni (f are pe orice interval de lungime finită cel mult un număr finit de discontinuităţi de prima speţă).*
3. *Există $M > 0$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ pentru orice $t \in [0, \infty)$ (creşterea funcţiei f la infinit este cel mult exponenţială).*

Mulţimea tuturor funcţiilor original va fi notată cu $\mathcal{O}$. Numărul

$$s_0 = \inf\{\alpha \in \mathbb{R}; \exists M \text{ astfel ca } |f(t)| \leq Me^{\alpha t} \text{ pentru orice } t \in \mathbb{R}\}$$

se numeşte **indice de creştere** *al funcţiei f.*

Transformata Laplace are o importanţă majoră în teoria semnalelor, de unde şi anumite interpretări şi motivări ale acestor condiţii. Astfel, o funcţie original poate fi gândită ca un semnal care este emis doar de la momentul $t = 0$ (t fiind variabila timp) şi are cel mult un număr finit de ajustări pe orice interval de lungime finită. Cea de-a treia condiţie are o interpretare mai degrabă computaţională (va asigura, în cele ce urmează, convergenţa unor integrale improprii).

Exemplul 1.1. Pentru $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 2e^{3t}, & t \geq 0 \end{cases}$, urmează că $M = 2$, iar $\alpha = 3$, în vreme ce pentru $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$, urmează că $M = 1$, iar $\alpha = 0$. Funcţia H astfel definită se mai numeşte şi **funcţia lui Heaviside** sau **treapta unitate**.

Exemplul 1.2. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = t$ nu este o funcţie original, întrucât nu satisface prima condiţie (ia valori nenule pentru $t < 0$). Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{t^2}, & t \geq 0 \end{cases}$, nu este nici ea o funcţie original, întrucât nu satisface cea de-a treia condiţie. Acest lucru se întâmplă deoarece, pentru $t \to \infty$, e^{t^2} ia valori mai mari decât $Me^{\alpha t}$ pentru orice valori date ale lui M şi α.

2 Transformata Laplace

Definiţia 2.1. *Fiind dată $f \in \mathcal{O}$, numim* **transformată Laplace** *a lui f, sau* **imagine** *a lui f, funcţia $F : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definită prin*

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt,$$

notată şi $\mathcal{L}[f]$.

Observaţie. Variabila (argumentul) lui F este s, nu t (variabila iniţială)! Variabila t dispare, fiind variabilă de integrare. F poate să nu fie definită pentru orice număr complex s, însă este definită pentru acei s cu proprietatea că $\operatorname{Re} s > \alpha_0$, α_0 fiind indicele de creştere asociat lui f.

În cele ce urmează, transformata Laplace a unei funcţii date va fi notată fie prefixând funcţia (aşezată între paranteze pătrate) cu $\mathcal{L}$, fie folosind litera mare corespunzătoare. De exemplu (lăsând la o parte argumentele), transformata Laplace a unei funcţii x va fi notată fie cu $\mathcal{L}[x]$ (motivul utilizării parantezelor pătrate, şi nu rotunde, fiind că nu x este variabilă pentru transformată, ci s), fie cu X.

$\mathcal{L}$ reprezintă deci o transformare (operator) pentru care atât domeniul cât şi codomeniul sunt mulţimi de funcţii. Vom utiliza de obicei notaţia simplificată $\mathcal{L}[x(t)]$ pentru transformata funcţiei x de argument t, argumentul transformatei $\mathcal{L}[x(t)]$ (s, nu t!), fiind subînţeles.

De asemenea, vom preciza doar valorile funcţiilor original pentru $t \geq 0$ deoarece, conform definiţiei, aceste funcţii iau oricum valoarea 0 pentru $t < 0$.

Observaţie. Singura excepţie uzuală de la regula "original notat cu literă mică, imagine notată cu literă mare" este funcţia lui Heaviside amintită anterior.

Exemplul 2.1. Au loc formulele

$$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}, \quad \mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}, \text{ pentru } a \in \mathbb{R}.$$

Într-adevăr,

$$\mathcal{L}[1] = \int_0^\infty e^{-st} 1 dt = \lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{-st} dt = \lim_{T\to\infty} \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_0^T = \lim_{T\to\infty} \left(\frac{e^{-sT}}{-s} + \frac{1}{s} \right) = \frac{1}{s},$$

similar fiind demonstrată şi cea de-a doua formulă.

Observaţie. De fapt, prima formulă este un caz particular al celei de-a doua pentru $a = 0$.

2.1 Proprietăţi ale transformatei Laplace

2.1.1 Liniaritate

Dacă $f_1, f_2 \in \mathcal{O}$, iar $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, atunci $c_1 f_1 + c_2 f_2 \in \mathcal{O}$, iar

$$\mathcal{L}[c_1 f_1 + c_2 f_2] = c_1 \mathcal{L}[f_1] + c_2 \mathcal{L}[f_2].$$

Observaţie. Cum $\mathcal{L}$ este definită cu ajutorul unei integrale (improprii!), este normal să aibă unele proprietăţi ale acesteia, în speţă liniaritatea, de unde şi relaţia de mai sus.

> **Exemplul 2.2.** Precizaţi $\mathcal{L}[3e^{2t} + 2e^{3t}]$.
>
> **Soluţie.** Conform proprietăţii de liniaritate,
>
> $$\mathcal{L}[3e^{2t} + 2e^{3t}] = 3\mathcal{L}[e^{2t}] + 2\mathcal{L}[e^{3t}] = 3\frac{1}{s-2} + 2\frac{1}{s-3}.$$

Reamintim acum că

$$e^{(\alpha + i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t), \text{ pentru } \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

de unde

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \text{ pentru } x \in \mathbb{R}.$$

Cu ajutorul acestor formule putem deduce transformatele Laplace ale funcţiilor sinus şi cosinus.

> **Exemplul 2.3.** Demonstraţi că
>
> $$\mathcal{L}[\cos at] = \frac{s}{s^2 + a^2}, \quad \mathcal{L}[\sin at] = \frac{a}{s^2 + a^2}, \text{ pentru } a \in \mathbb{R}.$$
>
> **Soluţie.** Conform proprietăţii de liniaritate,
>
> $$\begin{aligned} \mathcal{L}[\cos at] &= \mathcal{L}\left[\frac{e^{iat} + e^{-iat}}{2}\right] = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}[e^{iat}] + \mathcal{L}[e^{-iat}]\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s - ai} + \frac{1}{s + ai}\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{s + ai + s - ai}{(s - ai)(s + ai)} = \frac{s}{s^2 + a^2}, \end{aligned}$$
>
> similar putând fi demonstrată şi cea de-a doua formulă.

Reamintim că putem defini funcţiile hiperbolice ch (cosinus hiperbolic) şi sh (sinus hiperbolic) prin

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \text{ pentru } x \in \mathbb{R},$$

("ştergem i" în definiţiile funcţiilor trigonometrice corespunzătoare). Printr-un raţionament similar celui de mai sus obţinem că

$$\mathcal{L}[\operatorname{ch} at] = \frac{s}{s^2 - a^2}, \quad \mathcal{L}[\operatorname{sh} at] = \frac{a}{s^2 - a^2}, \text{ pentru } a \in \mathbb{R}.$$

Exemplul 2.4. Determinaţi

$$\mathcal{L}[3\cos 2t - 4\,\mathrm{sh}\,5t].$$

Soluţie. Conform proprietăţii de liniaritate,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[3\cos 2t - 4\,\mathrm{sh}\,5t] &= 3\mathcal{L}[\cos 2t] - 4\mathcal{L}[\mathrm{sh}\,5t] = 3\frac{s}{s^2+2^2} - 4\frac{5}{s^2-5^2}\\ &= \frac{3s}{s^2+2^2} - \frac{20}{s^2-5^2}.\end{aligned}$$

2.1.2 Unicitate

Dacă $f_1, f_2 \in \mathcal{O}$, iar $\mathcal{L}[f_1] = \mathcal{L}[f_2]$, atunci şi $f_1 = f_2$.

Memento. Dacă imaginile coincid, atunci coincid şi funcţiile original.

Această proprietate permite determinarea unei funcţii original atunci când este cunoscută imaginea sa. Reamintim că planul de folosire al transformatei Laplace este următorul: se reduce ecuaţia iniţială la o ecuaţie algebrică (în care funcţia imagine este necunoscuta), iar apoi se determină soluţia ecuaţiei iniţiale (funcţia original) pornind de la soluţia ecuaţiei algebrice (funcţia imagine). Dacă proprietatea de unicitate ar lipsi, adică ar exista mai multe funcţii original cu aceeaşi imagine, atunci soluţia ecuaţiei algebrice ar fi insuficientă pentru determinarea funcţiei original!

În mod general, această determinare se poate face cu ajutorul unei formule utilizând o integrală pe un contur în planul complex care depăşeşte cadrul acestui curs. Vom identifica, în cele ce urmează, funcţia original în anumite situaţii particulare, folosind şi notaţia $f \leftrightarrow F$, sau $f = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$, pentru a sublinia faptul că identificarea se poate face în ambele sensuri.

De exemplu, dată imaginea $\frac{1}{s-2}$, originalul (unic!) care-i corespunde este e^{2t}, scriind şi $e^{2t} \leftrightarrow \frac{1}{s-2}$ sau $e^{2t} = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right]$, iar dată imaginea $\frac{1}{s+3}$, originalul (unic!) care-i corespunde este e^{-3t}, scriind şi $e^{-3t} \leftrightarrow \frac{1}{s+3}$, sau $e^{-3t} = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right]$.

Exemplul 2.5. Cărui original îi corespunde imaginea $\frac{1}{s^2+4}$?

Soluţie. Deoarece

$$\frac{1}{s^2+4} = \frac{1}{s^2+2^2},$$

la numărător ar fi necesar 2, nu 1. Urmează atunci că

$$\frac{1}{s^2+4} = \frac{1}{2}\frac{2}{s^2+2^2},$$

iar originalul corespunzător este $\frac{1}{2}\sin 2t$.

Pentru determinări mai complicate poate fi folosită în unele cazuri descompunerea în fracţii simple, combinată cu faptul că $\mathcal{L}^{-1}$ are de asemenea proprietatea de liniaritate, adică

$$\mathcal{L}^{-1}[c_1F_1 + c_2F_2] = c_1\mathcal{L}^{-1}[F_1] + c_2\mathcal{L}^{-1}[F_2].$$

Exemplul 2.6. Cărui original îi corespunde imaginea $\frac{1}{(s+1)(s+2)}$?

Soluţie. Mai întâi descompunem imaginea în fracţii simple. În acest scop, observăm că numărătorul poate fi scris ca diferenţă a factorilor de la numitor. Avem atunci

$$\frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{(s+2)-(s+1)}{(s+1)(s+2)} = \frac{(s+2)}{(s+1)(s+2)} - \frac{(s+1)}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

Cum lui $\frac{1}{s+1}$ îi corespunde e^{-t}, iar lui $\frac{1}{s+2}$ îi corespunde e^{-2t}, urmează că originalul căutat este $e^{-t} - e^{-2t}$.

Observaţie. Putem determina, în anumite situaţii particulare, originalul corespunzător unei imagini date. Nu orice funcţie, însă, poate fi scrisă ca imaginea unui original.

În acest sens, poate fi demonstrat că dacă $f \in \mathcal{O}$, atunci există $K > 0$ astfel că $F(s) < \frac{K}{s}$, unde F este imaginea care-i corespunde lui f, iar din acest motiv $\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$. De aici, e^s (de exemplu) nu este imaginea niciunei funcţii original, întrucât $\lim_{s\to\infty} e^s = \infty$ (nu 0!).

În fapt, dacă $f, f' \in \mathcal{O}$, atunci

1. $$\lim_{s\to\infty} sF(s) = f(0+)$$
   (teorema valorii iniţiale).

2. Dacă există, în plus, $\lim_{t\to\infty} f(t) = L$, atunci
   $$\lim_{s\to 0} sF(s) = L$$
   (teorema valorii finale).

2.2 Derivarea originalului

Proprietatea următoare este fundamentală pentru rezolvarea ecuaţiilor şi sistemelor de ecuaţii diferenţiale.

Dacă $f, f' \in \mathcal{O}$, atunci

$$\mathcal{L}[f'](s) = sF(s) - f(0+).$$

Altfel spus,

$$\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0+),$$

$f(0+)$ fiind limita la dreapta a lui f în 0. Dacă f este continuă, această limită se înlocuieşte cu $f(0)$.

În mod similar,

$$\mathcal{L}[f^{(n)}](s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0+) - s^{n-2} f'(0+) - \ldots - f^{(n-1)}(0+).$$

Memento. În membrul drept, prima putere a lui s este egală cu ordinul de derivare. Puterea lui s scade apoi cu câte o unitate. Mai întâi se renunţă la litera mare, iar apoi se adaugă succesiv derivate, suma dintre puterea lui s şi ordinul de derivare fiind constantă, $n-1$. Ultimul termen conţine o derivată de ordin cu o unitate mai mic decât cel iniţial.

Exemplul 2.7. Rezolvaţi ecuaţia

$$x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = 2e^{3t}, \quad \text{cu condiţiile iniţiale } \begin{cases} x(0) = 3 \\ x'(0) = 6. \end{cases}$$

Soluţie. Aplicând transformata Laplace în ambii membri ai ecuaţiei, avem că

$$\mathcal{L}[x''(t) - 3x'(t) + 2x(t)] = \mathcal{L}[2e^{3t}],$$

adică

$$\mathcal{L}[x''(t)] - 3\mathcal{L}[x'(t)] + 2\mathcal{L}[x(t)] = 2\mathcal{L}[e^{3t}].$$

Conform formulei de derivare a originalului şi notând $\mathcal{L}[x(t)]$ cu litera mare corespunzătoare X, urmează că

$$\begin{aligned} & s^2X(s) - sx(0) - x'(0) - 3\,(sX(s) - x(0)) + 2X(s) = \frac{2}{s-3} \\ \implies & s^2X(s) - 3s - 6 - 3sX(s) + 9 + 2X(s) = \frac{2}{s-3} \\ \implies & (s^2 - 3s + 2)X(s) = 3s - 3 + \frac{2}{s-3} \\ \implies & X(s) = \frac{3s - 3 + \frac{2}{s-3}}{s^2 - 3s + 2}. \end{aligned}$$

De notat că în membrul drept nu este în general utilă aducerea la acelaşi numitor (în fapt, este necesară descompunerea în fracţii simple!). Urmează că

$$X(s) = \frac{3(s-1) + \frac{2}{s-3}}{(s-1)(s-2)} = \frac{3}{s-2} + \frac{2}{(s-1)(s-2)(s-3)}.$$

Din nou, descompunerea în fracţii simple se poate face cu ajutorul scrierii numărătorului ca o diferenţă de factori de la numitor. Utilizăm însă o altă metodă, mai generală.

$$\frac{2}{(s-1)(s-2)(s-3)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s-3}.$$

Prin înnmulţire cu $(s-1)$ şi simplificare, urmează că

$$\frac{2}{(s-2)(s-3)} = A + \frac{B(s-1)}{s-2} + \frac{C(s-1)}{s-3},$$

de unde, pentru $s = 1$ (valoarea care anulează factorul cu care am înmulţit) obţinem că

$$\frac{2}{(-1)(-2)} = A + \frac{B \cdot 0}{-1} + \frac{C \cdot 0}{-2} \implies A = 1.$$

Similar, înmulţind cu $(s-2)$, simplificând şi dând apoi lui s valoarea 2 obţinem $B=-2$, iar înmulţind cu $(s-3)$, simplificând şi dând apoi lui s valoarea 3 obţinem $C=1$. De aici,

$$X(s)=\frac{3}{s-2}+\frac{1}{s-1}-\frac{2}{s-2}+\frac{1}{s-3}=\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s-2}+\frac{1}{s-3},$$

de unde, conform proprietăţii de unicitate,

$$x(t)=e^2+e^{2t}+e^{3t}.$$

Exemplul 2.8. Rezolvaţi sistemul $\begin{cases}x'=2x-3y\\ y'=-2x+y\end{cases}$ cu condiţiile iniţiale $\begin{cases}x(0)=8\\ y(0)=3.\end{cases}$

Soluţie. Aplicând transformata Laplace în ambii membri ai sistemului, obţinem

$$\begin{cases}sX(s)-x(0)=2X(s)-3Y(s)\\ sY(s)-y(0)=-2X(s)+Y(s)\end{cases}\implies\begin{cases}(s-2)X(s)+3Y(s)=8|\cdot(s-1)\\ sX(s)+(s-1)Y(s)=3|\cdot 3.\end{cases}$$

$$\implies\begin{cases}(s-2)(s-1)X(s)+3(s-1)Y(s)=8(s-1)\\ 3sX(s)+3(s-1)Y(s)=9.\end{cases}$$

Prin scăderea celor două ecuaţii, obţinem

$$(s^2-3s-4)X(s)=8s-17\implies X(s)=\frac{8s-17}{s^2-3s-4}\implies X(s)=\frac{8s-17}{(s+1)(s-4)}.$$

Similar deducem că

$$Y(s)=\frac{3s-22}{(s+1)(s-4)}.$$

Până acum am determinat imaginile, anume

$$X(s)=\frac{8s-17}{(s+1)(s-4)},\quad Y(s)=\frac{3s-22}{(s+1)(s-4)}.$$

Rămâne deci să determinăm originalele din care aceste funcţii provin. În acest scop, descompunem mai întâi $X(s)$ şi $Y(s)$ în fracţii simple. Utilizăm acum identificarea coeficienţilor (deşi este posibil să folosim din nou înmulţirea şi darea de valori, nu şi metoda bazată pe scrierea numitorului ca diferenţă).

$$\frac{8s-17}{(s+1)(s-4)}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s-4}=\frac{A(s-4)+B(s+1)}{(s+1)(s-4)}=\frac{s(A+B)-4A+B}{(s+1)(s-4)}.$$

De aici, prin identificarea coeficienţilor,

$$\begin{cases}A+B=8\\ -4A+B=-17\end{cases}\implies A=5, B=3\implies X(s)=\frac{5}{s+1}+\frac{3}{s-4}.$$

În mod similar,

$$\frac{3s-22}{(s+1)(s-4)} = \frac{C}{s+1} + \frac{D}{s-4} = \frac{C(s-4)+D(s+1)}{(s+1)(s-4)} = \frac{s(C+D)-4C+D}{(s+1)(s-4)},$$

de unde

$$\begin{cases} C+D=3 \\ -4C+D=-22 \end{cases} \implies C=5, D=-2 \implies Y(s) = \frac{5}{s+1} - \frac{2}{s-4}.$$

Deoarece

$$X(s) = \frac{5}{s+1} + \frac{3}{s-4},$$

iar

$$\frac{1}{s+1} \leftrightarrow e^{-t}, \quad \frac{1}{s-4} \leftrightarrow e^{4t},$$

urmează că

$$x(t) = 5e^{-t} + 3e^{4t}.$$

Similar,

$$Y(s) = \frac{5}{s+1} - \frac{2}{s-4} \implies y(t) = 5e^{-t} - 2e^{4t}.$$

Exemplul 2.9. Demonstraţi că $\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2}$.

Soluţie. Să notăm $f(t) = t$, $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$. Conform formulei de derivare a originalului şi ţinând cont că $f'(t) = 1$, iar $f(0) = 0$, obţinem

$$\mathcal{L}[1] = sF(s) - 0 \implies \frac{1}{s} = sF(s) \implies F(s) = \frac{1}{s^2}.$$

2.2.1 Ecuaţia operaţională ataşată unei ecuaţii diferenţiale de ordinul n cu coeficienţi constanţi

Fie ecuaţia diferenţială de ordinul n cu coeficienţi constanţi

$$a_n x^{(n)}(t) + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = f(t),$$

însoţită de condiţiile iniţiale

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ x'(0) = x_1 \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(0) = x_{n-1}. \end{cases}$$

Aplicând transformata Laplace în ambii membri ai ecuaţiei şi ţinând cont de formula de derivare a originalului, obţinem că

$$\mathcal{L}[a_n x^{(n)}(t) + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 x'(t) + a_0 x(t)] = \mathcal{L}[f(t)],$$

$$\implies a_n\mathcal{L}[x^{(n)}(t)] + a_{n-1}\mathcal{L}[x^{(n-1)}(t)] + \ldots a_0\mathcal{L}[x(t)] = F(s)$$
$$\implies a_n\left(s^nX(s) - s^{n-1}x(0) - s^{n-2}x'(0) - \ldots - x^{(n-1)}(0)\right)$$
$$+ a_{n-1}\left(s^{n-1}X(s) - s^{n-2}x(0) - s^{n-3}x'(0) - \ldots - x^{(n-2)}(0)\right) + \ldots$$
$$+ a_1\left(sX(s) - x(0)\right) + a_0X(s) = F(s).$$

Regrupând termenii, obţinem

$$\left(a_ns^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1s + a_0\right)X(s) - x(0)P_0(s) - x'(0)P_1(s) - \ldots$$
$$- x^{(n-1)}(0)P_{n-1}(s) = F(s),$$

ceea ce conduce la

$$P(s)X(s) = x(0)P_0(s) + x'(0)P_1(s) + \ldots + x^{(n-1)}(0)P_{n-1}(s) + F(s),$$

ecuaţie numită **ecuaţia operaţională** ataşată ecuaţiei iniţiale. În cele de mai sus, $P(s)$ este polinomul caracteristic ataşat ecuaţiei omogene, scris în variabila s în loc de λ, P_0 se obţine din P prin eliminarea termenului liber şi împărţirea la s şi în general, pentru $1 \leq k \leq n-1$, P_k se obţine din P_{k-1}, polinomul anterior, prin eliminarea termenului liber şi împărţirea la s. De observat că P_{n-1} este totdeauna constant, egal cu coeficientul termenului dominant al lui $P(s)$.

Exemplul 2.10. Rezolvaţi ecuaţia $x''(t) - 5x'(t) + 4x(t) = 2e^{3t}$ cu condiţiile iniţiale $\begin{cases} x(0) = 2 \\ x'(0) = 3 \end{cases}$.

Soluţie. În cazul de faţă, $P(s) = s^2 - 5s + 4$, $P_0(s) = \dfrac{s^2 - 5s}{s} = s - 5$, $P_1 = \dfrac{s}{s} = 1$, iar imaginea membrului drept este $\mathcal{L}[2e^{3t}] = \dfrac{2}{s-3}$. Ecuaţia operatorială este atunci

$$(s^2 - 5s + 4)X(s) = (s-5)\cdot 2 + 1\cdot 3 + \frac{2}{s-3}$$
$$\implies (s^2 - 5s + 4)X(s) = 2s - 7 + \frac{2}{s-3}$$
$$\implies X(s) = \frac{2s - 7 + \frac{2}{s-3}}{(s-1)(s-4)}$$
$$\implies X(s) = \frac{(2s-7)(s-3) + 2}{(s-1)(s-3)(s-4)}.$$

Descompunem $X(s)$ în fracţii simple, sub forma $X(s) = \dfrac{A}{s-1} + \dfrac{B}{s-3} + \dfrac{C}{s-4}$. Obţinem că $A = 2$, $B = -1$, $C = 1$, de unde

$$X(s) = \frac{2}{s-1} - \frac{1}{s-3} + \frac{1}{s-4}.$$

Cum $\frac{1}{s-1}$ este imaginea lui e^t, $\frac{1}{s-3}$ este imaginea lui e^{3t} iar $\frac{1}{s-4}$ este imaginea lui e^{4t}, obţinem că

$$x(t) = 2e^t - e^{3t} + e^{4t}.$$

2.3 Integrarea originalului

Dacă $f \in \mathcal{O}$, atunci $\int_0^t f(\tau)d\tau \in \mathcal{O}$, iar

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right](s) = \frac{\mathcal{L}[f](s)}{s} = \frac{F(s)}{s}.$$

Memento. Din nou, "integrarea are proprietăţi inverse derivării". La derivarea originalului, imaginea lui f se înmulţea cu s, iar acum, la integrarea acestuia, se împarte.

Memento. Dacă imaginea se împarte la s, atunci originalul se integrează (şi reciproc!).

În mod similar,

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t \int_0^{t_1} f(\tau)d\tau dt_1\right] = \frac{F(s)}{s^2}, \ldots$$
$$\mathcal{L}\left[\int_0^t \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \ldots \int_0^{t_{n-1}} f(\tau)d\tau \ldots dt_2 dt_1 dt\right] = \frac{F(s)}{s^n},$$

(multiple integrări atrag multiple împărţiri la s).

Formula de integrare a originalului este utilă, de exemplu, pentru rezolvarea unor ecuaţii integrale.

Exemplul 2.11. Rezolvaţi ecuaţia

$$x(t) = t + \int_0^t x(\tau)d\tau.$$

Soluţie. Aplicând transformata Laplace în ambii membri, urmează că

$$\mathcal{L}[x(t)] = \mathcal{L}\left[t + \int_0^t x(\tau)d\tau\right] \Longrightarrow \mathcal{L}[x(t)] = \mathcal{L}[t] + \mathcal{L}\left[\int_0^t x(\tau)d\tau\right].$$

Atunci

$$X(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{X(s)}{s} \Longrightarrow X(s)\left(1 - \frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s^2} \Longrightarrow X(s) = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{s}{s-1},$$

de unde

$$X(s) = \frac{1}{s(s-1)}.$$

După descompunerea membrului drept în fracţii simple, urmează că

$$X(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} \Longrightarrow x(t) = e^t - 1.$$

Exemplul 2.12. Determinaţi originalul corespunzător imaginii $\frac{1}{s(s+1)}$.

Soluţie. Mai întâi, observăm că $\frac{1}{s(s+1)} = \frac{\frac{1}{s+1}}{s}$ (scriem originalul sub forma unei fracţii în care numitorul este s). Cum originalul corespunzător lui $\frac{1}{s+1}$ este e^{-t}, originalul corespunzător lui $\frac{\frac{1}{s+1}}{s}$ este integrala acestuia, $\int_0^t e^{-\tau} d\tau = \left.\frac{e^{-\tau}}{-1}\right|_0^t = 1 - e^{-t}$.

Exemplul 2.13. Determinaţi originalul corespunzător imaginii $\frac{1}{s(s^2+4)}$.

Soluţie. Mai întâi, observăm că $\frac{1}{s(s^2+4)} = \frac{\frac{1}{s^2+4}}{s}$ (scriem originalul sub forma unei fracţii în care numitorul este s).

Determinăm acum originalul corespunzător lui $\frac{1}{s^2+4}$. Deoarece

$$\frac{1}{s^2+4} = \frac{1}{2}\frac{2}{s^2+2^2},$$

acest original este $f = \frac{1}{2}\sin 2t$, iar originalul corespunzător lui $\frac{\frac{1}{s^2+4}}{s}$ este atunci integrala lui f,

$$\int_0^t \frac{1}{2}\sin 2\tau d\tau = \left.\frac{1}{2}\frac{-\cos 2\tau}{2}\right|_0^t = \frac{1}{4}\left(1-\cos 2t\right).$$

2.4 Derivarea imaginii

Dacă $f \in \mathcal{O}$, atunci

$$\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{d}{ds}\left(\mathcal{L}[f(t)]\right).$$

Memento. Dacă originalul se înmulţeşte cu t, atunci imaginea iniţială se derivează şi i se schimbă semnul. Altfel spus, pentru a aplica formula de derivare a imaginii în calculul $\mathcal{L}[tf(t)]$, se elimină mai întâi t şi se calculează imaginea corespunzătoare. Această imagine mai apoi se derivează şi se înmulţeşte cu -1.

În mod asemănător,

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\left(\mathcal{L}[f(t)]\right).$$

Memento. Dacă originalul se înmulţeşte cu t^n, atunci imaginea iniţială se derivează de n ori şi se înmulţeşte cu $(-1)^n$.

Exemplul 2.14. Determinaţi $\mathcal{L}[te^{-2t}]$.

Soluţie.

$$\mathcal{L}[te^{-2t}] = -\frac{d}{ds}\left(\mathcal{L}[e^{-2t}]\right) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+2}\right) = -\left(-\frac{1}{(s+2)^2}\right) = \frac{1}{(s+2)^2}.$$

Exemplul 2.15. Determinaţi $\mathcal{L}[t\sin 3t]$.

Soluţie.

$$\mathcal{L}[t\sin 3t] = -\frac{d}{ds}\left(\mathcal{L}[\sin 3t]\right) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{3}{s^2+9}\right) = \frac{6s}{(s^2+9)^2}.$$

Exemplul 2.16. Demonstraţi că

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad \mathcal{L}[t^n e^{at}] = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}.$$

Soluţie. Într-adevăr

$$\mathcal{L}[t^n] = \mathcal{L}[t^n \cdot 1] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\left(\mathcal{L}[1]\right) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\left(\frac{1}{s}\right)$$

O formulă elementară de derivare cunoscută afirmă faptul că

$$\left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}.$$

Cu ajutorul acesteia, urmează că

$$\mathcal{L}[t^n] = (-1)^n \frac{(-1)^n n!}{s^{n+1}} = \frac{n!}{s^{n+1}},$$

cea de-a doua formulă obţinându-se analog.

Exemplul 2.17. Determinaţi originalul corespunzător imaginii $\frac{1}{(s-1)^2}$.

Soluţie. Observăm mai întâi că

$$\frac{1}{(s-1)^2} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s-1}\right) = \mathcal{L}[tf(t)],$$

conform formulei de derivare a imaginii, unde f este originalul corespunzător lui $\frac{1}{s-1}$. Cum $f(t) = e^t$, urmează că originalul căutat este te^t.

2.5 Integrarea imaginii

Dacă $f \in \mathcal{O}$, atunci

$$\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int_s^\infty \mathcal{L}[f](\tau)d\tau.$$

Memento. În vreme ce înmulţirea cu t a originalului avea ca rezultat **derivarea** imaginii (şi schimbarea semnului), împărţirea la t are un rezultat invers, anume **integrarea** imaginii. Altfel spus, pentru a aplica formula de integrare a imaginii în calculul $\mathcal{L}[\frac{f(t)}{t}]$, se elimină mai întâi t şi se calculează imaginea corespunzătoare. Această imagine mai apoi se integrează.

Exemplul 2.18. Determinaţi $\mathcal{L}\left[\frac{\sin t}{t}\right]$.

Soluţie.

$$\mathcal{L}\left[\frac{\sin t}{t}\right] = \int_s^\infty \mathcal{L}[\sin t](\tau)d\tau = \int_s^\infty \frac{1}{\tau^2+1}d\tau = \operatorname{arctg}\tau\big|_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} s.$$

Exemplul 2.19. Determinaţi $\mathcal{L}\left[\frac{e^{3t}-e^{-3t}}{t}\right]$.

Soluţie. Conform formulei de integrare a imaginii,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\frac{e^{3t}-e^{-3t}}{t}\right] &= \int_s^\infty \mathcal{L}\left[e^{3t}-e^{-3t}\right](\tau)d\tau = \int_s^\infty \frac{1}{\tau-3} - \frac{1}{\tau+3}d\tau \\ &= \left[\ln|\tau-3| - \ln|\tau+3|\right]_s^\infty = \ln\left|\frac{\tau-3}{\tau+3}\right|\Bigg|_s^\infty \\ &= \lim_{T\to\infty}\left[\ln\left|\frac{T-3}{T+3}\right| - \ln\left|\frac{s-3}{s+3}\right|\right] = \ln\left|\frac{s+3}{s-3}\right|.\end{aligned}$$

2.6 Imaginea produsului de convoluţie

Aşa cum s-a mai menţionat, transformata Laplace, fiind definită cu ajutorul unei integrale improprii, păstrează proprietăţile acesteia, în particular liniaritatea. Reversul medaliei este însă că ea păstrează şi **lipsa** unor anumite proprietăţi. În particular, după cum integrala unui produs nu este în general produsul integralelor factorilor, nici transformata Laplace a unui produs (algebric) nu este în general produsul transformatelor factorilor.

Într-adevăr, să observăm că $\mathcal{L}[t^2] = \frac{2}{s^3}$, iar $\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2}$, de unde $\mathcal{L}[t]\cdot\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^4}$, iar

$$\mathcal{L}[t^2] \neq \mathcal{L}[t]\cdot\mathcal{L}[t].$$

Rămâne deci de observat ce schimbări trebuie aduse pentru ca o proprietate de acest tip să devină adevărată. În acest scop, vom introduce noţiunea de produs de convoluţie.

Definiţia 2.2. *Dacă $f, g \in \mathcal{O}$, numim* **produs de convoluţie** *al funcţiilor f, g o altă funcţie original notată $f * g$ şi definită prin*

$$f * g(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau.$$

2.6.1 Proprietăţi ale produsului de convoluţie

Produsul de convoluţie, ca şi produsul algebric, este comutativ, asociativ şi distributiv faţă de adunare şi scădere (pot fi desfăcute paranteze similar calculelor algebrice). În speţă, au loc egalităţile

1. $f * g = g * f$,
2. $(f * g) * h = f * (g * h)$,
3. $(f + g) * h = f * h + g * h$, $(f - g) * h = f * h - g * h$

pentru orice $f, g, h \in \mathcal{O}$.

Cu aceste preliminarii, putem obţine următoarea proprietate.

Dacă $f, g \in \mathcal{O}$, atunci

$$\mathcal{L}[f * g] = \mathcal{L}[f] \cdot \mathcal{L}[g].$$

Memento. Transformata produsului (de convoluţie) este egală cu produsul (algebric) al transformatelor.

Exemplul 2.20. Calculaţi $\mathcal{L}[\int_0^t e^{t-\tau} \sin \tau d\tau]$.

Soluţie. Cum

$$\int_0^t e^{t-\tau} \sin \tau d\tau = e^t * \sin t,$$

urmează că

$$\mathcal{L}[\int_0^t e^{t-\tau} \sin \tau d\tau] = \mathcal{L}[e^t * \sin t] = \mathcal{L}[e^t]\mathcal{L}[\sin t] = \frac{1}{s-1} \cdot \frac{1}{s^2+1}.$$

Exemplul 2.21. Determinaţi originalul f care corespunde imaginii

$$F(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2}.$$

Soluţie. Deoarece

$$F(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2} = \frac{1}{s^2+1} \cdot \frac{1}{s^2+1} = \mathcal{L}[\sin t] \cdot \mathcal{L}[\sin t],$$

urmează că originalul căutat este

$$f(t) = \sin t * \sin t = \int_0^t \sin(t-\tau) \sin \tau d\tau.$$

Cum

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \left[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\right], \text{ pentru } \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

urmează că

$$f(t) = \frac{1}{2} \int_0^t [\cos(t-2\tau) - \cos t] d\tau = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(t-2\tau)}{-2} \Big|_0^t - t \cos t \right] = \frac{1}{2} \left[\sin t - t \cos t\right].$$

2.7 Teorema asemănării

Dacă $f \in \mathcal{O}$, iar $k > 0$, atunci

$$\mathcal{L}[f(kt)] = \frac{1}{k}\mathcal{L}[f]\left(\frac{s}{k}\right).$$

Memento. Pentru aplicarea teoremei asemănării în calculul imaginii $\mathcal{L}[f(kt)]$, se elimină mai întâi coeficientul de asemănare k şi se calculează transformata Laplace a funcţiei rămase. Se împart apoi la k atât rezultatul obţinut (adică se înmulţeşte cu $\frac{1}{k}$) cât şi argumentul s (adică se înlocuieşte s cu $\frac{s}{k}$).

Exemplul 2.22. Ştiind că $\mathcal{L}\left[\frac{\sin t}{t}\right] = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} s$, calculaţi $\mathcal{L}\left[\frac{\sin 3t}{3t}\right]$.

Soluţie. Coeficientul de asemănare este 3. Eliminăm acest coeficient şi calculăm $\mathcal{L}\left[\frac{\sin t}{t}\right] = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} s$. Împărţim acum rezultatul la 3 şi înlocuim s cu $\frac{s}{3}$, obţinând că

$$\mathcal{L}\left[\frac{\sin 3t}{3t}\right] = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{s}{3}\right).$$

Exemplul 2.23. Dacă f este în aşa fel încât $\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{(s-2)^3(s+1)}$, calculaţi $\mathcal{L}[f(3t)]$.

Soluţie. Deoarece $\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{(s-2)^3(s+1)}$, urmează conform teoremei asemănării că $\mathcal{L}[f(3t)] = \frac{1}{3}\frac{1}{(\frac{s}{3}-2)^3(\frac{s}{3}+1)}$ (se împart cu 3, coeficientul de asemănare, atât imaginea cât şi argumentul s, adică se înmulţeşte cu $\frac{1}{3}$ şi înlocuieşte s cu $\frac{s}{3}$). De aici, $\mathcal{L}[f(3t)] = \frac{27}{(s-6)^3(s+3)}$.

2.8 Teorema deplasării

Dacă $f \in \mathcal{O}$, atunci

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = \mathcal{L}[f(t)](s-a).$$

Memento. Pentru aplicarea teoremei deplasării în calculul imaginii $\mathcal{L}[e^{at}f(t)]$, se calculează mai întâi transformata Laplace a funcţiei obţinute după eliminarea exponenţialei, iar apoi se înlocuieşte s cu $s-a$.

Observaţie. Înlocuirea lui s cu $s-a$ poate fi interpretată ca o **deplasare** (translaţie) a argumentului imaginii. Este folosită şi denumirea de "teorema întârzierii imaginii", datorită prezenţei în membrul drept a argumentului "întârziat" $s-a$.

Exemplul 2.24. Determinaţi $\mathcal{L}[e^{2t}\sin 3t]$, $\mathcal{L}[e^{2t}\cos 3t]$.

Soluţie. Pentru a determina $\mathcal{L}[e^{2t}\sin 3t]$, calculăm mai întâi $\mathcal{L}[\sin 3t]$ (transformata Laplace a funcţiei obţinute după eliminarea exponenţialei), iar apoi înlocuim s cu $s-2$. Deoarece $\mathcal{L}[\sin 3t] = \frac{3}{s^2+3^2}$, urmează că

$$\mathcal{L}[e^{2t}\sin 3t] = \frac{3}{(s-2)^2+3^2}.$$

Similar, deoarece $\mathcal{L}[\cos 3t] = \frac{s}{s^2+3^2}$, urmează că

$$\mathcal{L}[e^{2t}\cos 3t] = \frac{s-2}{(s-2)^2+3^2}.$$

Exemplul 2.25. Dacă f este în aşa fel încât $\mathcal{L}[f(t)] = \dfrac{1}{(s+3)^2(s-5)}$, calculaţi $\mathcal{L}[e^{-3t}f(4t)]$.

Soluţie. Deoarece $\mathcal{L}[f(t)] = \dfrac{1}{(s+3)^2(s-5)}$, urmează conform teoremei asemănării că $\mathcal{L}[f(4t)] = \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{(\frac{s}{4}+3)^2(\frac{s}{4}-5)}$ (se împart cu 4, coeficientul de asemănare, atât imaginea cât şi argumentul s, adică se înmulţeşte cu $\dfrac{1}{4}$ şi înlocuieşte s cu $\dfrac{s}{4}$). De aici, $\mathcal{L}[f(4t)] = \dfrac{16}{(s+12)^2(s-20)}$,

Conform teoremei deplasării, pentru a calcula $\mathcal{L}[e^{-3t}f(4t)]$, înlocuim s cu $s+3$, de unde

$$\mathcal{L}[e^{-3t}f(4t)] = \frac{16}{(s+15)^2(s-17)}.$$

Exemplul 2.26. Determinaţi argumentul corespunzător imaginii $F(s) = \frac{1}{(s-3)^2+25}$.

Soluţie. Folosim teorema deplasării cu $a = 3$, deoarece "întârzierea" din paranteză este 3. Întrucât

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+25}\right] = \frac{1}{5}\sin 5t,$$

(eliminăm întârzierea şi determinăm originalul corespunzător) urmează că originalul căutat este

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-3)^2+25}\right] = \frac{1}{5}e^{3t}\sin 5t$$

(înmulţim originalul anterior cu exponenţiala întârzierii).

Exemplul 2.27. Determinaţi argumentul corespunzător imaginii $F(s) = \frac{s}{(s+2)^2+16}$.

Soluţie. Întrucât $s+2 = s-(-2)$, ar trebui folosită teorema deplasării cu $a = -2$. Totuşi, numărătorul este s, nu $s+2$, iar imaginea trebuie scrisă mai întâi în totalitate ca funcţie de $s+2$ (şi numărătorul!). Avem că

$$\frac{s}{(s+2)^2+16}=\frac{s+2-2}{(s+2)^2+16}=\frac{s+2}{(s+2)^2+16}-\frac{2}{(s+2)^2+16}.$$

Deoarece

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+16}\right]=\cos 4t, \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2+16}\right]=\frac{1}{2}\sin 4t$$

(eliminăm întârzierea şi determinăm originalul corespunzător) urmează că originalul căutat este

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s+2)^2+16}\right]=e^{-2t}\left(\cos 4t-\frac{1}{2}\sin 4t\right).$$

(înmulţim originalele anterioare cu exponenţiala întârzierii).

2.9 Teorema întârzierii argumentului

Dacă $f \in \mathcal{O}$, atunci

$$\mathcal{L}[H(t-a)f(t-a)]=e^{-as}F(s).$$

Aici, $H:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este funcţia lui Heaviside amintită anterior, $H(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t\geq 0\end{cases}$, de unde

$$H(t-a)f(t-a)=\begin{cases}0, & t-a<0\\ 1, & t-a\geq 0\end{cases}\cdot f(t-a)=\begin{cases}0, & t<a\\ f(t-a), & t\geq a\end{cases}$$

Observaţie. $H(t-a)f(t-a)$ reprezintă o funcţie "întârziată", care ia aceleaşi valori ca şi f, dar cu întârzierea a.

Alternativ, $H(t-a)f(t-a)$ poate fi gândit ca un semnal care este emis începând cu $t=a$ (şi nu cu $t=0$!), reamintirea acestui lucru fiind, în fapt, motivul cel mai important pentru utilizarea (şi a) lui $H(t-a)$. În fapt, pentru că f este funcţie original, $H(t-a)f(t-a)$ şi $f(t-a)$ iau exact aceleaşi valori!

Memento. Teorema întârzierii argumentului este importantă nu pentru determinarea vreunei imagini, ci pentru determinarea unor originale asociate anumitor imagini date, care conţin exponenţiale. Astfel, se identifică mai întâi a, după care se elimină exponenţiala şi se determină originalul funcţiei rămase. În acest original, se înlocuieşte t cu $t-a$ şi se înmulţeşte cu $H(t-a)$ (sau, echivalent, se scrie cu ajutorul unor funcţii pe ramuri faptul că funcţia rezultată "începe" din $t=a$, şi nu din $t=0$!).

Exemplul 2.28. Determinaţi argumentul corespunzător imaginii $F(s)=\frac{1}{s-3}e^{-2s}$.

Soluţie. Prezenţa exponenţialei e^{-2s} în membrul drept sugerează că poate fi folosită teorema întârzierii argumentului pentru $a=2$. Eliminăm exponenţiala, iar funcţia rămasă, $F(s)=\frac{1}{s-3}$ are originalul $f(t)=e^{3t}$. Pentru a obţine originalul iniţial înlocuim t cu $t-2$ şi obţinem că originalul iniţial este $H(t-2)e^{3(t-2)}$, altfel spus

$$\begin{cases} e^{3(t-2)}, & t \geq 2 \\ 0, & t < 2 \end{cases}.$$

Exemplul 2.29. Determinaţi transformata Laplace a funcţiei $g(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ (t-1)^n, & t \geq 1 \end{cases}.$

Soluţie. Semnalul g este emis începând cu $t = 1$. Observăm atunci că $g(t) = H(t-1)f(t-1)$, unde $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t^n, & t \geq 0 \end{cases}$. Conform teoremei întârzierii originalului cu $a = 1$, avem atunci

$$\mathcal{L}[g(t)] = \mathcal{L}[H(t-1)f(t-1)] = e^{-s}\mathcal{L}[f(t)],$$

iar deoarece $\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$, urmează că

$$\mathcal{L}[g(t)] = e^{-s}\frac{n!}{s^{n+1}}.$$

Exemplul 2.30. Determinaţi transformata Laplace a funcţiei $g(t) = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ \sin(t-2), & t \geq 2 \end{cases}.$

Soluţie. Semnalul g este emis începând cu $t = 2$. Observăm atunci că $g(t) = H(t-2)f(t-2)$, unde $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \sin t, & t \geq 0 \end{cases}$. Conform teoremei întârzierii originalului cu $a = 2$, avem atunci

$$\mathcal{L}[g(t)] = \mathcal{L}[H(t-2)f(t-2)] = e^{-2s}\mathcal{L}[f(t)],$$

iar deoarece $\mathcal{L}[\sin t] = \frac{1}{s^2+1}$, urmează că

$$\mathcal{L}[g(t)] = e^{-2s}\frac{1}{s^2+1}.$$

3 Alte aplicaţii ale transformatei Laplace

3.1 Rezolvarea unor ecuaţii diferenţiale cu coeficienţi neconstanţi

Exemplul 3.1. Rezolvaţi ecuaţia diferenţială cu coeficienţi neconstanţi

$$x''(t) + 4tx'(t) - 8x(t) = 2, \text{ cu condiţiile iniţiale } \begin{cases} x(0) = 0 \\ x'(0) = 0 \end{cases}.$$

Soluţie. Nu putem utiliza ecuaţia caracteristică, întrucât unul dintre coeficienţi, $4t$, nu este constant. Aplicând transformata Laplace în ambii membri, urmează că

$$\mathcal{L}[x''(t) + 4tx'(t) - 8x(t)] = \mathcal{L}[2]$$

$$\implies \mathcal{L}[x''(t)] + 4\mathcal{L}[tx'(t)] - 8\mathcal{L}[x(t)] = \frac{2}{s}$$
$$\implies s^2X(s) - sx(0) - x'(0) + 4\mathcal{L}[tx'(t)] - 8X(s) = \frac{2}{s}$$
$$\implies s^2X(s) + 4\mathcal{L}[tx'(t)] - 8X(s) = \frac{2}{s}$$

Conform teoremei derivării imaginii, urmează că

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[tx'(t)] &= -\frac{d}{ds}\left(\mathcal{L}[x'(t)]\right) = -\frac{d}{ds}\left(sX(s) - x(0)\right)\\ &= -X(s) - sX'(s),\end{aligned}$$

folosind şi formula de derivare a unui produs. De aici,

$$s^2X(s) - 4X(s) - 4sX'(s) - 8X(s) = \frac{2}{s}$$
$$\implies -4sX'(s) + (s^2 - 12)X(s) = \frac{2}{s}$$
$$\implies X'(s) = \frac{s^2 - 12}{4s}X(s) - \frac{1}{2s^2}$$
$$\implies X'(s) = \left(\frac{s}{4} - \frac{3}{s}\right)X(s) - \frac{1}{2s^2}.$$

Aceasta este o ecuaţie diferenţială liniară în necunoscuta $X(s)$, cu $a(s) = \frac{s}{4} - \frac{3}{s}$, $b(s) = -\frac{1}{2s^2}$. Urmează atunci că

$$P(s) = \int a(s)ds = \int \left(\frac{s}{4} - \frac{3}{s}\right)ds = \frac{s^2}{8} - 3\ln s$$

(reamintim că P se poate alege convenabil), iar

$$X(s) = e^{\frac{s^2}{8} - 3\ln s}\int -\frac{1}{2s^2}e^{-\frac{s^2}{8} + 3\ln s}ds$$
$$\implies X(s) = \frac{-1}{2}\frac{e^{\frac{s^2}{8}}}{e^{3\ln s}}\int \frac{1}{s^2}e^{-\frac{s^2}{8}}e^{3\ln s}ds$$
$$\implies X(s) = \frac{-1}{2s^3}e^{\frac{s^2}{8}}\int se^{-\frac{s^2}{8}}ds.$$

Cum

$$\int se^{-\frac{s^2}{8}}ds = -4\int\left(-\frac{s^2}{8}\right)' e^{-\frac{s^2}{8}}ds = -4e^{-\frac{s^2}{8}} + C,$$

se obţine că

$$X(s) = \frac{-1}{2s^3} e^{\frac{s^2}{8}} \left(-4e^{-\frac{s^2}{8}} + C \right) = \frac{2}{s^3} - \frac{C}{2s^3} e^{\frac{s^2}{8}}.$$

De notat că

$$\lim_{s\to\infty} \frac{1}{2s^3} e^{\frac{s^2}{8}} = \infty.$$

Cum $X(s)$este o imagine, în mod necesar $\lim_{s\to\infty} X(s) = 0$, deci $C = 0$! De aici,

$$X(s) = \frac{2}{s^3} \implies x(t) = t^2.$$

Observaţie. De remercat faptul că a fost necesară şi cunoaşterea unei proprietăţi a transformatei Laplace (valoarea limitei la infinit) mai puţin utilizată până acum. În plus, coeficientul neconstant ($4t$) a avut o formă simplă, care a permis aplicărea teoremei derivării imaginii. Rezolvarea unor ecuaţii diferenţiale cu coeficienţi neconstanţi de o formă generală este, de obicei, foarte dificilă.

3.2 Rezolvarea unor ecuaţii cu derivate parţiale

Exemplul 3.2. Rezolvaţi ecuaţia cu derivate parţiale

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = x, \text{ pentru } t > 0, x > 0$$

cu condiţiile iniţiale

$$u(0,x) = 0, \ x > 0,$$

şi condiţiile la limită

$$u(t,0) = 0, \ t > 0.$$

Soluţie. Aplicând transformata Laplace (în raport cu variabila t) în ambii membri, obţinem

$$\mathcal{L}[\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)] + \mathcal{L}[\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)] = \mathcal{L}[x].$$

Cum

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)] &= sU(s,x) - u(0,x) \\ &= sU(s,x)\end{aligned}$$

(conform formulei derivării imaginii, utilizând şi condiţiile iniţiale),

$$\mathcal{L}[\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)] = \frac{\partial}{\partial x}\mathcal{L}[u(t,x)] = \frac{\partial U}{\partial x}(s,x)$$

(transformarea se face în raport cu t, nu cu x, operatorul de derivare în raport cu x trecând înaintea transformării), iar

$$\mathcal{L}[x] = x\mathcal{L}[1] = \frac{x}{s},$$

(din nou, transformarea se face în raport cu t, nu cu x), urmează că

$$sU(s,x) + \frac{\partial U}{\partial x}(s,x) = \frac{x}{s}.$$

Acum, s va fi tratat ca un parametru, întrucât noua ecuaţie nu conţine derivate în raport cu s. Schimbând şi notaţia, obţinem

$$U' = -sU + \frac{x}{s}$$

care este o ecuaţie liniară cu $a(x) = -s$, $b(x) = \frac{x}{s}$. Atunci

$$P(x) = \int -s dx = -sx,$$

iar

$$U = e^{-sx} \int \frac{x}{s} e^{sx} dx = \frac{1}{s} e^{-sx} \int x e^{sx} dx.$$

Integrând prin părţi, obţinem

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{s} e^{-sx} \int x \frac{1}{s} \left(e^{sx}\right)' dx \\ &= \frac{1}{s} e^{-sx} \left[\frac{x}{s} e^{sx} - \frac{1}{s^2} e^{sx} + C \right]. \end{aligned}$$

De aici,

$$U(s,x) = \frac{x}{s^2} - \frac{1}{s^3} + \frac{C}{s} e^{-sx}.$$

Rămâne deci să determinăm C. Cum C apare în cadrul transformatei Laplace, avem nevoie nu de condiţia la limită, ci de transformata acesteia. Avem că

$$u(t,0) = 0 \implies U(s,0) = 0 \implies 0 = \frac{0}{s^2} - \frac{1}{s^3} + \frac{C}{s} e^{-s0} = \implies C = \frac{1}{s^2}.$$

De aici,

$$U(s,x) = \frac{x}{s^2} - \frac{1}{s^3} + \frac{1}{s^3} e^{-sx}.$$

Rămâne acum să determinăm originalul din care provine U. Deoarece

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{x}{s^2} - \frac{1}{s^3} + \frac{1}{s^3} e^{-sx}] = \mathcal{L}^{-1}[\frac{x}{s^2}] - \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s^3}] + \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s^3} e^{-sx}]$$

$$= x\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s^2}] - -\frac{t^2}{2} + H(t-x)\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s^3}](t-x)$$
$$= xt - \frac{t^2}{2} - H(t-x)\frac{(t-x)^2}{2}.$$

urmează că
$$u(t,x) = xt - \frac{t^2}{2} - H(t-x)\frac{(t-x)^2}{2}.$$
Este totuşi mai convenabil să scriem această expresie utilizând cazuri.

Deoarece
$$H(t-x)\frac{(t-x)^2}{2} = \begin{cases} \frac{(t-x)^2}{2}, & t-x \geq 0 \\ 0, & t-x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{(t-x)^2}{2}, & t \geq x \\ 0, & t < x \end{cases},$$
urmează că
$$u(t,x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & t \geq x \\ tx - \frac{t^2}{2}, & t < x. \end{cases}$$

3.3 Calculul unor integrale improprii

Exemplul 3.3. Calculaţi
$$I = \int_0^\infty te^{-3t}\cos t dt.$$
Soluţie. Să notăm mai întâi că
$$I = \int_0^\infty e^{-3t} t\cos t dt,$$
expresie similară cu cea a unei transformări Laplace, dar cu 3 în loc de s, iar
$$\mathcal{L}[t\cos t] = \int_0^\infty e^{-st} t\cos t dt = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[\cos t] = - - \frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2},$$
conform teoremei derivării imaginii. Pentru $s = 3$, obţinem că $I = \frac{2}{25}$.

Exemplul 3.4. Calculaţi
$$I = \int_0^\infty \frac{e^{-3t} - e^{-6t}}{t} dt.$$
Soluţie. Integrandul este o fracţie cu numitorul t. Din acest motiv, intuim că putem aplica formula de integrare a imaginii.

Totuşi, sub forma dată, integrala nu reprezintă transformata Laplace a vreunei funcţii, întrucât sub integrală nu apare e^{-st}. Să notăm
$$I(s) = \int_0^\infty e^{-st}\frac{e^{-3t} - e^{-6t}}{t} dt$$

şi să observăm că

$$I(s) = \mathcal{L}\left[\frac{e^{-3t} - e^{-6t}}{t}\right] = \int_s^\infty \mathcal{L}[e^{-3t} - e^{-6t}](\tau)d\tau,$$

conform formulei de integrare a imaginii, iar integrala I din enunţ este de fapt $I(0)$. Urmează că

$$I(s) = \int_s^\infty \left[\frac{1}{\tau+3} - \frac{1}{\tau+6}\right] d\tau = \ln\left|\frac{\tau+3}{\tau+6}\right|\Bigg|_s^\infty = -\ln\left|\frac{s+3}{s+6}\right|.$$

De aici,

$$I = I(0) = -\ln\frac{3}{6} = \ln 2.$$

Exemplul 3.5. Calculaţi

$$I = \int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2}dx.$$

Soluţie. Nu mai putem utiliza raţionamentul precedent (şi nici un alt gen de formulă imediată), întrucât numitorul este $1+x^2$, nu x. Vom aplica transformata Laplace şi schimba ordinea de integrare. În acest scop este necesară introducerea unei noi variabile, întrucât I reprezintă un număr, nu o funcţie, căreia să-i putem aplica transformata Laplace. Să notăm

$$I(t) = \int_0^\infty \frac{\cos tx}{1+x^2}dx$$

şi să observăm că $I(1) = I$, iar

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[I(t)] &= \int_0^\infty e^{-st}\left(\int_0^\infty \frac{\cos tx}{1+x^2}dx\right)dt \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-st}\frac{\cos tx}{1+x^2}dx\right)dt \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-st}\frac{\cos tx}{1+x^2}dt\right)dx\end{aligned}$$

după schimbarea ordinii de integrare. Urmează că

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[I(t)] &= \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\left(\int_0^\infty e^{-st}\cos tx dt\right)dx \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\mathcal{L}[\cos tx]dx \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\frac{s}{s^2+x^2}dx \\ &= \int_0^\infty \frac{s}{(1+x^2)(s^2+x^2)}dx.\end{aligned}$$

Rămâne deci să descompunem fracţia de sub integrală în fracţii simple. Cum

$$\frac{s}{(1+x^2)(s^2+x^2)} = \frac{s}{s^2-1}\left[\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{s^2+x^2}\right],$$

urmează că

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[I(t)] &= \int_0^\infty \frac{s}{(1+x^2)(s^2+x^2)}dx = \int_0^\infty \frac{s}{s^2-1}\left[\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{s^2+x^2}\right]dx \\
&= \frac{s}{s^2-1}\int_0^\infty \left[\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{s^2+x^2}\right]dx \\
&= \frac{s}{s^2-1}\left[\operatorname{arctg} x - \frac{1}{s}\operatorname{arctg}\frac{x}{s}\right]\Bigg|_0^\infty \\
&= \frac{s}{s^2-1}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{s}\frac{\pi}{2}\right] \\
&= \frac{\pi}{2}\frac{1}{s+1}.
\end{aligned}$$

Deoarece $\mathcal{L}[I(t)] = \frac{\pi}{2}\frac{1}{s+1}$, urmează că $I(t) = \frac{\pi}{2}e^{-t}$, iar

$$I = I(1) = \frac{\pi}{2e}.$$

Probleme propuse. 1. Determinaţi imaginile următoarelor funcţii

(a) $f(t) = 2$.

(b) $f(t) = 5e^{-4t}$, $g(t) = 3e^{2t}$, $h(t) = 5e^{-4t} + 3e^{2t}$.

(c) $f(t) = 2\sin 3t$, $g(t) = 4\cos 6t$, $h(t) = 2\sin 3t - 4\cos 6t$.

(d) $f(t) = 2t^3$, $g(t) = 3t^2$, $h(t) = 2t^3 - 3t^2$.

2. Determinaţi originalele care corespund următoarelor imagini

(a) $F(s) = \frac{3}{s}$.

(b) $F(s) = \frac{6}{s-3}$, $G(s) = \frac{8}{s+5}$, $H(s)\frac{6}{s-3} + \frac{8}{s+5}$.

(c) $F(s) = \frac{1}{2s-5}$, $G(s) = \frac{2}{4s+3}$.

(d) $F(s) = \frac{1}{s+1}$, $G(s) = \frac{1}{s+3}$, $H(s) = \frac{2}{(s+1)(s+3)}$.

(e) $F(s) = \frac{1}{s+2}$, $G(s) = \frac{1}{s+5}$, $H(s) = \frac{3}{(s+2)(s+5)}$.

(f) $F(s) = \frac{3}{s^2+9}$, $G(s) = \frac{s}{s^2+9}$, $H(s) = \frac{3}{s^2+9} - \frac{s}{s^2+9}$.

(g) $F(s) = \frac{5}{s^2+4}$, $G(s) = \frac{6s}{s^2+4}$, $H(s) = \frac{10}{s^2+4} + \frac{18s}{s^2+4}$.

(h) $F(s) = \frac{12}{s^2-25}$, $G(s) = \frac{4s}{s^2-25}$, $H(s) = \frac{24}{s^2-25} - \frac{12s}{s^2-25}$.

3. Determinaţi originalele care corespund următoarelor imagini

(a) $F(s) = \frac{1}{s^2+5s+6}$.

(b) $F(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+1)}$.

(c) $F(s) = \frac{1}{s^2(s+1)}$.

4. Rezolvaţi ecuaţia

$$x'(t) + 3x(t) = e^{-t}, \quad \text{cu condiţia iniţială } x(0) = 0.$$

5. Rezolvaţi ecuaţia

$$x''(t) - 4x(t) = \sin 2t, \quad \text{cu condiţiile iniţiale } \begin{cases} x(0) = 2 \\ x'(0) = -\frac{1}{4}. \end{cases}$$

6. Determinaţi următoarele produse de convoluţie.

(a) $t * \cos t$.

(b) $e^{2t} * t$.

(c) $\sin t * \sin t$.

7. Determinaţi originalul f care corespunde imaginii

$$F(s) = \frac{s}{(s^2+1)^2}.$$

8. Dacă f este în aşa fel încât $\mathcal{L}[f(t)] = \dfrac{s+3}{s^2+4}$, calculaţi $\mathcal{L}[f(2t)]$, $\mathcal{L}[tf(t)]$.

9. Rezolvaţi ecuaţiile integrale

(a) $x(t) = 2 + \displaystyle\int_0^t (t-\tau)x(\tau)d\tau$.

(b) $x(t) - \displaystyle\int_0^t (t-\tau)x(\tau)d\tau = t$.

(c) $x(t) = \displaystyle\int_0^t x(t-\tau)\sin\tau d\tau$.

10. Determinaţi $\mathcal{L}\left[\displaystyle\int_0^t \tau e^{-\tau} d\tau\right]$.

11. Determinaţi $\mathcal{L}\left[\displaystyle\int_0^t \frac{\sin\tau}{\tau} d\tau\right]$.

12. Rezolvaţi ecuaţia integrodiferenţială

$$x'(t) = \int_0^t x(\tau)\cos(t-\tau)d\tau, \quad \text{cu condiţia iniţială } x(0) = 1.$$

13. Determinaţi

(a) $\mathcal{L}[t(3\sin 2t - 2\cos 3t)]$.

(b) $\mathcal{L}[e^{2t}(4t + 3\sin 3t)]$.

(c) $\mathcal{L}[e^{-t}\sin^2 t]$.

(d) $\mathcal{L}[te^{2t}\sin 3t]$.

(e) $\mathcal{L}[\operatorname{ch} t \sin 3t]$

14. Rezolvaţi ecuaţia diferenţială cu coeficienţi neconstanţi

$$tx''(t) - tx'(t) + x(t) = 2, \text{ cu condiţiile iniţiale } \begin{cases} x(0) = 2 \\ x'(0) = 4 \end{cases}.$$

15. Rezolvaţi ecuaţia cu derivate parţiale

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x), \text{ pentru } t > 0, x \in \mathbb{R}$$

cu condiţiile iniţiale

$$u(0,x) = 3x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \sin 2x, \quad x > 0.$$

16. Determinaţi

$$I = \int_0^\infty te^{-2t}\sin t dt.$$

17. Determinaţi

$$\int_0^\infty \frac{\cos 6t - \cos 4t}{t} dt$$