Transformarea Fourier

Transformarea Fourier

Definiţie, exemple.

Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ se numeşte **absolut integrabilă** dacă integrala

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt$$

este convergentă.

Definiţia 1.1

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ absolut integrabilă. Funcţia complexă de variabilă reală $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$,

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} f(t)\, dt,\ \omega \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

*se numeşte **transformata Fourier** a funcţiei f.*

Deoarece f este absolut integrabilă şi $\left|e^{-j\omega t} f(t)\right| = |f(t)|$, rezultă că integrala

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} f(t)\, dt$$

este absolut şi uniform convergentă în raport cu parametrul $\omega \in \mathbb{R}$.

Vom nota tranformata Fourier a funcţiei f şi astfel

$$F = \mathcal{F}[f(t)], \;\; F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)](\omega), \; \omega \in \mathbb{R},$$

evidenţiind astfel şi variabila t a funcţiei f şi variabila ω a transformatei F. De multe ori se utilizează şi notaţia $F(j\omega)$ aceasta numindu-se caracteristica spectrală sau spectrul în frecvenţă a semnalului $f = f(t)$. Utilizăm şi notaţia

$$f(t) \Longrightarrow F(\omega).$$

Observaţii:

- Dacă f este cu valori reale, situaţie întâlnită practic, atunci

$$F(-\omega) = \overline{F(\omega)},$$

motiv pentru care este suficient să cunoaştem $F(\omega)$ pentru valori $\omega > 0$.

- Dacă $f = f(t)$ este funcţie original absolut integrabilă, atunci transformata Fourier $F(\omega)$ este tocmai valoarea transformatei Laplace în punctul $s = j\omega$. Din acest motiv pentru transformata Fourier se mai foloseşte notaţia $F(j\omega)$.

Pentru $f(t) = \sigma(t)e^{-t}$ transformata Laplace este $\mathcal{L}[f(t)](s) = \dfrac{1}{s+1}$ în semiplanul $\mathrm{Re}\, s > 1$, şi atunci transformata Fourier este $\mathcal{F}[f(t)](\omega) = \dfrac{1}{j\omega + 1}$, $\omega \in \mathbb{R}$.

Exemplul 1.1

Să se determine transformata Fourier a semnalului dreptunghiular de amplitudine $A > 0$ pe intervalul $[-\ell, \ell]$, $\ell > 0$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} A, & x \in [-\ell, \ell], \\ 0, & \text{în rest}. \end{cases}$$

$F(\omega) = A\int\limits_{-\ell}^{\ell} e^{-j\omega t}\,dt = \dfrac{A}{j\omega}\left(e^{j\omega\ell} - e^{-j\omega\ell}\right)$, şi, folosind formula lui Euler $\sin z = \dfrac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j}$, deducem

$$F(\omega) = \frac{2A}{\omega}\sin\omega\ell = 2\ell A\,\mathrm{sa}\,\omega\ell,$$

unde $\mathrm{sa}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\mathrm{sa}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ este funcţia denumită **sinus atenuat.**

Proprietăţi ale transformării Fourier

Teorema 2.1

(liniaritate) *Dacă* $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *sunt două funcţii absolut integrabile iar*

$$f_1(t) \Longrightarrow F_1(\omega),$$
$$f_2(t) \Longrightarrow F_2(\omega),$$

atunci pentru orice $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ *funcţia* $c_1 f_1 + c_2 f_2$ *este absolut integrabilă şi*

$$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \Longrightarrow c_1 F_1(\omega) + c_2 F_2(\omega). \tag{2.1}$$

Exemplul 2.1

Să se determine transformata Fourier pentru funcţiile raţionale

$$f(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$$

unde P şi Q sunt polinoame, $\mathrm{grad}\ Q > 1 + \mathrm{grad}\ P$ *iar* $Q(t) \neq 0$ *pentru orice* $t \in \mathbb{R}$*.*

Din consecinţa teoremei reziduurilor avem

$$F(\omega) = 2\pi j \sum_{Im\ z_k > 0} \mathrm{Rez} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{-j\omega z}, z_k \right),$$

suma fiind extinsă la toţi polii z_k ai funcţiei $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ situaţi în semiplanul superior.

Teorema 2.2

(asemănare) *Dacă* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *este funcţie absolut integrabilă şi*

$$f(t) \Longrightarrow F(\omega),$$

atunci pentru orice $a \in \mathbb{R},\ a \neq 0$ *are loc relaţia:*

$$f(at) \Longrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right). \tag{2.2}$$

Teorema 2.3

(întârzierea argumentului) *Dacă* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *este absolut integrabilă şi*

$$f(t) \Longrightarrow F(\omega),$$

atunci pentru orice $t_0 \in \mathbb{R}$ *are loc relaţia:*

$$f(t - t_0) \Longrightarrow e^{-j\omega t_0} F(\omega). \tag{2.3}$$

Teorema 2.4

(deplasare) *Dacă* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *este absolut integrabilă şi* $f(t) \Longrightarrow F(\omega)$*, atunci pentru orice* $\lambda \in \mathbb{R}$ *are loc relaţia:*

$$e^{-j\lambda t} f(t) \Longrightarrow F(\omega + \lambda). \tag{2.4}$$

Teorema 2.5

Transformata Fourier $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *a unei funcţii continue absolut integrabile* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *este o funcţie continuă şi*

$$\lim_{|\omega| \to \infty} F(\omega) = 0.$$

Transformarea Fourier este injectivă. Dacă $\mathcal{F}[f(t)] = \mathcal{F}[g(t)]$ deducem că $f(t) = g(t)$ aproape pentru toţi $t \in \mathbb{R}$. Spunem că o proprietate are loc aproape peste tot (a.p.t.) dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, mulţimea punctelor unde proprietatea nu are loc, poate fi acoperită cu intervale a căror lungime totală este mai mică decât ε.

Pentru clasa de **funcţii rapid descrescătoare**, transformarea Fourier este şi surjectivă, deci inversabilă şi atunci vom putea scrie

$$f(t) \Longleftrightarrow F(\omega).$$

$$\mathcal{S} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} |\, f \in C^{\infty}(\mathbb{R}), \forall\, k, q \in \mathbb{N}, \exists\, C_{k,q}, \left| x^k f^{(q)}(x) \right| \leq C_{k,q}\},$$

unde $f^{(q)}$ este derivata de ordin q a funcţiei f.

Un exemplu de funcţie rapid descrescătoare este este $f(t) = e^{-t^2}$.

Funcţiile din $\mathcal{S}$ sunt mărginite şi integrabile pe $\mathbb{R}$.
Într-adevăr, pentru $f \in \mathcal{S}$ au loc majorările

$$\left| x^k f^{(q)}(x) \right| \leq C_{k,q}$$

şi

$$\left| t^k f^{(q)}(t) \right| \leq \frac{C_{k+2,q}}{t^2}.$$

Rezultă atunci

$$\left| x^k f^{(q)}(x) \right| \leq \min \left\{ C_{k,q}, \frac{C_{k+2,q}}{t^2} \right\} \leq \frac{C^*_{k,q}}{1+t^2}$$

unde $C^*_{k,q}$ este o constantă convenabil aleasă, iar funcţia $\dfrac{C^*_{k,q}}{1+t^2}$ este absolut integrabilă.

Teorema 2.6

(Derivarea transformatei) *Dacă* $f \in \mathcal{S}$ *atunci transformata sa Fourier* F *este indefinit derivabilă pe* $\mathbb{R}$, $F \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, *şi pentru orice* $k \in \mathbb{N}$ *are loc*

$$t^k f(t) \Longrightarrow j^k F^{(k)}(\omega). \tag{2.5}$$

Teorema 2.7

(Transformarea derivatei) *Dacă* $f \in \mathcal{S}$, *şi* $f(t) \Longrightarrow F(\omega)$ *atunci, pentru orice* $k \in \mathbb{N}$ *are loc*

$$f^{(k)}(t) \Longrightarrow (j\omega)^k F(\omega) \tag{2.6}$$

Teorema 2.8

(Transformarea integralei) *Dacă* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *este absolut integrabilă,* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = 0$ *şi* $f(t) \Longrightarrow F(\omega)$ *atunci are loc relaţia:*

$$\int\limits_{-\infty}^{t} f(\tau)\, d\tau \Longrightarrow \frac{1}{j\omega} F(\omega). \tag{2.7}$$

Teorema 2.9

Transformarea Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ este o aplicaţie liniară şi continuă.

Teorema 2.10

(Formula de inversiune) *Dacă $f \in \mathcal{S}$ şi*

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} f(t)\, dt = \mathfrak{F}[f(t)](\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}$$

atunci are loc

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} F(\omega)\, d\omega, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.8}$$

Dacă $f \in \mathcal{S}$, atunci are loc formula

$$\mathcal{F}[\mathcal{F}[f]](t) = 2\pi f(-t). \tag{2.9}$$

Din formula de inversiune (2.8) scrisă sub forma

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} F(\omega)\, d\omega = 2\pi f(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

rezultă

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} F(\omega)\, d\omega = 2\pi f(-t).$$

Cum membrul stâng este transformata Fourier a funcţiei $F(\omega)$ relaţia se scrie (2.9).

Teorema 2.11

Dacă $f, g \in \mathcal{S}$, *şi*

$$f(t) \Longrightarrow F(\omega), \quad g(t) \Longrightarrow G(\omega),$$

atunci au loc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)g(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)G(x)\,dx \tag{2.10}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g}(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\overline{G}(\omega)\,d\omega \tag{2.11}$$

Fie $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Funcţia $f_1 * f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definită prin

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\, d\tau, \quad t \in \mathbb{R}$$

se numeşte **produs în convoluţie** a funcţiilor f_1, f_2.

Teorema 2.12

(Imaginea convoluţiei) *Dacă $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $f, g \in \mathcal{S}$ şi*

$$f(t) \Longrightarrow F(\omega) \quad g(t) \Longrightarrow G(\omega),$$

atunci

$$(f * g)(t) \Longrightarrow F(\omega) \cdot G(\omega). \tag{2.12}$$

Teorema 2.13

(Convoluţia imaginilor) *Dacă* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $f, g \in \mathcal{S}$ *şi*

$$f(t) \Longrightarrow F(\omega) \quad g(t) \Longrightarrow G(\omega),$$

atunci

$$f(t) \cdot g(t) \Longrightarrow \frac{1}{2\pi} F(\omega) * G(\omega). \tag{2.13}$$

Dacă în (2.11) alegem $f = g$, formula devine

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 \, d\omega. \tag{2.14}$$

Formula (2.14) se numeşte **formula lui Parseval** şi, interpretată fizic, exprimă o lege de conservare a energiei; primul membru reprezintă energia degajată de circuit, iar al doilea energia spectrală.

Transformatele Fourier sinus şi cosinus

Fie $f : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$.

Definiţia 3.1

Numim **transformata cosinus** *funcţia* $F_c : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$,

$$F_c[f(t)](\omega) = \mathfrak{F}_c[f]](\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \cos \omega x \, dx, \quad \omega \geq 0. \quad (3.1)$$

Din teorema de inversiune a transformatei Fourier rezultă că are loc formula de inversare

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} F_s(\omega) \cos \omega x \, d\omega. \tag{3.2}$$

Definiţia 3.2

Numim **transformata sinus** *funcţia* $F_s : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$,

$$F_s[f(t)](\omega) = \mathcal{F}_s[f]](\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \sin \omega x \, dx, \quad \omega \geq 0. \quad (3.3)$$

Din teorema de inversiune a transformatei Fourier rezultă că are loc formula de inversare

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} F_s(\omega) \sin \omega x \, d\omega. \tag{3.4}$$