9. Integrale din functii definite în $\mathbb{R}$

9.3. Generalizări ale Integralei Riemann - Integrale Improprii

Succinte preliminarii teoretice (+ exemple)

Integrala definită (sau integrala definită) a fost definită pe un interval mărginit $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, plecând de la diviziuni ale acestui interval şi construind sume integrale (de tip Daboux sau de tip Riemann) ale căror limită era tocmai

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{sau} \quad \int_a^b f. \tag{9.443}$$

Această construcţie teoretică pleca de la o funcţie mărginită pe intervalul considerat, acesta fiind la rândul său mărginit. Integrabilitatea funcţiei se stabilea cu ajutorul sumelor integrale menţionate, urmând o serie de teoreme care identificau clase largi de funcţii integrabile, de exemplu funcţiile continue sau cele monotone.

Integrale improprii pe intervale nemărginite

Dacă (cel puţin) una din cele două condiţii de mărginire de mai sus este relaxată se ajunge la o generalizare corespunzătoare a conceptului de integrala definită în sens Riemann. Prezentăm definiţia formală a unei prime asemenea generalizări.

Definiţia 9.3.1. Fie $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie reală mărginită şi integrabilă pe orice interval de forma $[a, t] \subset \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$. Dacă există, în $\mathbb{R}$, limita

$$\lim_{t \to \infty} \int_a^t f(x)\,dx = I \in \mathbb{R} \tag{9.445}$$

atunci acest număr real I reprezintă integrala (improprie) din funcţia f pe intervalul nemărginit $[a, +\infty)$ şi se foloseşte notaţia

$$\boxed{\lim_{t \to \infty} \int_a^t f(x)\,dx \underset{\text{def}}{=} \int_a^{+\infty} f(x)\,dx .} \tag{9.446}$$

Perfect analog se definesc integralele improprii pe interval nemărginit spre $-\infty$. Dacă funcţia f este mărginită şi integrabilă pe orice interval de forma $[s, b] \subset \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}$ şi există limita de mai jos, atunci

$$\boxed{\lim_{s \to -\infty} \int_s^b f(x)\,dx \underset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^b f(x)\,dx .} \tag{9.447}$$

Se pot defini şi integrale improprii pe toată axa reală, dar o astfel de integrală se scrie ca suma de două integrale, de forma (9.447) & (9.446), iar existenţa integralei din funcţia f pe întreg intervalul $(-\infty, +\infty)$ este condiţionată de existenţa <u>ambelor</u> integrale din descompunerea menţionată. Aşadar, o astfel de integrală pe interval nemărginit în ambele sensuri se poate scrie ca

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \underset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx\,,} \tag{9.448}$$

unde c este un număr real oarecare. Acest c poate fi, de exemplu, originea cu abscisa 0 sau un alt punct în care, posibil, funcţia de integrat îşi schimbă expresia analitică.

Integralele improprii au o serie de proprietăţi comune cu ale integralei definite sau care provin din acestea. De exemplu, liniaritatea operatorului integral în raport cu funcţia-integrand, formula integrării prin părţi etc. De asemenea, se poate aplica şi metoda schimbării de variabilă. În unele situaţii, o substituţie adecvată poate transforma o întegrală pe interval nemărgint cum este – de exemplu – una de forma (9.446) într-o integrală pe interval finit :

$$I = \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx \ \text{ cu } \ a > 0 \ \ \& \ \ x = \frac{1}{t} \ \Rightarrow \ I = -\int_{1/a}^{0} f(1/t)\,\frac{dt}{t^2} = \int_{0}^{1/a} f(1/t)\,\frac{dt}{t^2}\,.$$

O integrală improprie (pe interval nemărginit) de oricare dintre formele anterior prezentate poate fi calculată efectiv folosind definiţiile respective, adică (9.446) / (9.447), prin trecere la limită în $I(t)$, respectiv $I(s)$. Dacă F este o primitivă a funcţiei de integrat f, deci dacă $(\forall\, x \in [a, +\infty) \,|\, x \in (-s\,, b])\ F'(x) = f(x)$, atunci cele două formule menţionate devin

$$\boxed{\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx \underset{\text{def}}{=} \lim_{t \to \infty} [F(t) - F(a)] = \lim_{t \to \infty} F(t) - F(a)\,;} \tag{9.446'}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx \underset{\text{def}}{=} \lim_{s \to -\infty} [F(b) - F(s)] = F(b) - \lim_{s \to -\infty} F(s)..} \tag{9.447'}$$

Printr-un mic abuz de notaţie putem scrie

$$\boxed{\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx = [F(x)]_{a}^{+\infty}\,, \quad \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = [F(x)]_{-\infty}^{b}\,.} \tag{9.449}$$

Evident, în (9.448), variaţiile primitivei din membrii secunzi nu implică şi luarea "valorii" primitivei în extremităţile de la infinit ale axei reale ci exact trecerile la limită din (9.446') & (9.447'). Aceste ultime trei formule pot fi considerate ca *adaptări ale formulei Newton-Leibniz la cazul intervalelor infinite.*

Înainte de a se calcula valoarea unei integrale improprii (pe interval nemărginit) se poate pune problemei existenţei acesteia, adică a existenţei în $\mathbb{R}$ a limitelor din (9.446) / (9.447). Această problemă este una de *convergenţă*, oarecum similară cu cele întâlnite – de exemplu – la seriile numerice. Aşadar, se poate pune problema stabilirii naturii unei integrale improprii (adică a convergenţei / divergenţei sau inexistenţei acesteia) înainte de a aborda determinarea valorii ei. Mai mult decât atât, este posibil ca să se poată stabili convergenţa unei integrale dar găsirea valorii ei să ridice probleme majore, de exemplu în cazul în care primitiva implicată în formulele (9.446') / (9.447') - (9.449) nu este exprimabilă analitic prin funcţii elementare. Au fost descoperite şi formulate o serie de **criterii de convergenţă** pentru integrale improprii de diverse tipuri, dar le vom prezenta succint după ce vom oferi câteva exemple.

Ex.9.3 – 1 $\quad (\boldsymbol{i}) \quad \int_{0}^{+\infty} \cos x \, dx \,; \qquad (\boldsymbol{ii}) \quad \int_{-\infty}^{0} \sin x \, dx \,.$

Nici una dintre aceste două integrale nu există întrucât nu există limitele din definiţii :

$$(\boldsymbol{i}) \quad F(x) = \sin x \ \ \& \ \ \lim_{t \to \infty} [F(t) - F(0)] = \lim_{t \to \infty} \sin t : \nexists \;; \quad \text{analog pentru} \quad (\boldsymbol{ii}).$$

Ex.9.3 – 2 $\quad (\boldsymbol{iii}) \quad \int_{2}^{+\infty} \frac{2}{x^3} \, dx \,; \qquad (\boldsymbol{iv}) \quad \int_{-\infty}^{1} e^x \, dx \,.$

$$(\boldsymbol{iii}) \quad F(x) = -\frac{1}{x^2} \ \Rightarrow \ \lim_{t \to \infty} [F(t) - F(2)] = \frac{1}{4} - \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t^2} = \frac{1}{4}. \tag{9.450}$$

$$(\boldsymbol{iv}) \quad F(x) = e^x \ \Rightarrow \ \lim_{s \to -\infty} [F(1) - F(s)] = e - \lim_{s \to -\infty} e^t = e - e^{-\infty} = e. \tag{9.451}$$

Din punct de vedere geometric, rezultatele din (9.450) & (9.451) reprezintă ariile unor regiuni plane nemărginite, prima având o astfel de "ramură" spre $+\infty$, a doua spre $-\infty$.

Integralele improprii *divergente* sunt integralele a căror valoare, conform definiţiile anterioare, este $+\infty$, respectiv $-\infty$.

Ex.9.3 - 3 $\quad$ **(v)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2\,dx$; $\qquad$ **(vi)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} \operatorname{arctg} x\,dx$.

$$\textbf{(v)}\quad F(x) = \frac{x^3}{3} \;\Rightarrow\; \lim_{t\to\infty}[F(t) - F(0)] = \lim_{t\to\infty}\frac{t^3}{3} = +\infty. \tag{9.452}$$

(vi) Primitiva arctangentei se găseşte printr-o integrare prin părţi. Notând

$$\begin{cases} u = \operatorname{arctg} x, \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{1+x^2}\,dx, \\ v = x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = [x \operatorname{arctg} x]_{-\infty}^{1} - \int_{-\infty}^{1}\frac{x}{1+x^2}\,dx = [x \operatorname{arctg} x]_{-\infty}^{1} - \frac{1}{2}[\ln(1+x^2)]_{-\infty}^{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{4} - (-\infty)\frac{\pi}{2} - \ln\sqrt{2} + \infty = +\infty.$$

Criterii de convergenţă pentru integralele improprii de forma (9.446) / (9.447)

1 Criterii de comparaţie.

KC.1 Dacă $0 \le f(x) \le g(x)$ pe intervalul $[a, +\infty)$ atunci

$$\textbf{(i)}\quad \int_a^{+\infty} g(x)\,dx \ \text{CONV} \;\Rightarrow\; \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \ \text{CONV}; \tag{9.453}$$

$$\textbf{(ii)}\quad \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \ \text{DIV} \;\Rightarrow\; \int_a^{+\infty} g(x)\,dx \ \text{DIV}. \tag{9.454}$$

Acest criteriu se poate uşor generaliza, dacă se acceptă ca una din cele două funcţii să fie înmulţită cu o constantă *pozitivă şi nenulă*. O asemenea operaţie nu schimbă natura integralei, din punctul de vedere al convergenţei / divergenţei.

KC.2 (*Criteriul de comparaţie la limită*). Dacă există limita raportului

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = L \in \overline{\mathbb{R}} = [0, +\infty] \tag{9.455}$$

atunci :

$$\begin{cases} (i): L \in [0, +\infty) \ \& \ \int_0^{+\infty} g \ \text{CONV} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f \ \text{CONV}, \\ (ii): L \in (0, +\infty] \ \& \ \int_a^{+\infty} g \ \text{DIV} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f \ \text{DIV}. \end{cases} \tag{9.456}$$

Acest criteriu rezultă din precedentul, $\mathbf{KC.1}$, dacă limita din (9.455) este caracterizată, în cazul (i), în limbaj "$\varepsilon \rightarrow \alpha(\varepsilon)$" iar în cazul (ii) cu limita $L \in \mathbb{R}$ tot cu aceste vecinătăţi. Pentru un $\varepsilon_0 > 0$ fixat,

(i) & (9.455) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \ [x > \alpha(\varepsilon) = \alpha > 0 \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \in (L - \varepsilon_0, L + \varepsilon_0) \Rightarrow f(x) < Cg(x).] \tag{9.457}$$

Întrucât cele două funcţii sunt pozitive, ca în $\mathbf{KC.1}$, inegalitatea pentru raportul funcţiilor implică $f(x) < (L + \varepsilon_0) g(x) \Rightarrow C = L + \varepsilon_0$ în (9.457).

$$\text{Analog,} \quad (ii) \ \& \ (9.457) \ \Rightarrow \quad g(x) > \frac{1}{C} f(x). \tag{9.458}$$

Conform cu observaţia la criteriul $\mathbf{KC.1}$, inegalităţile din (9.457) & (9.458) păstrează implicaţiile din acest criteriu. Ar mai fi de discutat şi cazul când $L = +\infty$, în cazul (ii). Caracterizarea cu vecinătăţi fundamentale a acestei limite este

$$x > \alpha(\varepsilon) = \alpha > 0 \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} > \beta \Rightarrow g(x) < \beta f(x). \tag{9.459}$$

Cu aceeaşi observaţie la criteriul anterior, rezultă concluzia din $\mathbf{KC.2}$, (ii). Numărul real (şi pozitiv) β care intervine în (9.459) este extremitatea stângă a unei vecinătăţi oarecare a limitei impoprii $L = +\infty$, $(\beta, +\infty)$. Evident, se poate alege un $\beta_0 > 0$ particular.

Aceste două criterii se pot formula şi pentru integrale improprii (din funcţii pozitive) de forma (9.447), cu singura diferenţă că întervalul pe care se compară cele două funcţii va fi de forma $(-\infty, b]$ iar limita L din (9.455) & (9.456) va fi calculată pentru $x \rightarrow -\infty$.

Cele două criterii tocmai prezentate se pot aplica pentru comparaţia comportării unei funcţii la integrarea pe un interval nemărginit cu cea a unei funcţii simple, mai exact a funcţiiilor dintr-o întreagă familie, depinzând de un parametru real cu rol de putere (sau exponent). Aceste funcţii sunt de forma

$$g(x) = \frac{1}{x^{\lambda}}, \ \lambda \in \mathbb{R}. \tag{9.460}$$

Pentru o limită inferioară de integrare $a > 0$,

$$\int_a^{+\infty} g(x)\,dx = \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^{\lambda}}\,dx = \lim_{t \to \infty}\left[\frac{x^{1-\lambda}}{1-\lambda}\right]_a^t = \lim_{t \to \infty} \frac{t^{1-\lambda}}{1-\lambda} - \frac{a^{1-\lambda}}{1-\lambda}. \tag{9.461}$$

Limita din (9.461) depinde de poziţia parametrului λ fa ţă de 1 : dacă notăm limita din (9.461) cu $\ell(\lambda)$ rezultă că

$$\ell(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } \lambda > 1, \\ +\infty & \text{pentru } \lambda < 1. \end{cases} \tag{9.462}$$

Având în vedere cele două fracţii din ultimul membru al egalităţilor (9.461) este evident că valoare $\lambda = 1$ nu poate fi considerată în cei doi termeni ai acestui membru, dar ea este perfect acceptabilă pentru integrala respectivă :

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t \to \infty}\left[\ln x\right]_a^t = \lim_{t \to \infty} \ln t - \ln a = +\infty. \tag{9.463}$$

În fine, din (9.461-463) rezultă natura integralei din (9.461) în toate cazurile posibile.

$$\int_a^{+\infty} g(x)\,dx = \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^{\lambda}}\,dx = \begin{cases} 0 & \text{pentru } \lambda > 1, \\ +\infty & \text{pentru } \lambda \le 1. \end{cases} \tag{9.464}$$

Primul caz din (9.464) este unul de **CONV**ergenţă în timp ce al doilea este unul de **DIV**ergenţă.

Trecând la criteriul de comparaţie (la limită) pentru o funcţie f mărginită şi integrabilă pe intervalul oarecare $[a, +\infty)$ cu funcţia g din (9.460) şi ţinând seama de (9.464) rezultă că natura integralei va depinde de λ şi de poziţia în $\overline{\mathbb{R}}$ a limitei

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{1/x^{\lambda}} = \lim_{x \to +\infty} x^{\lambda} f(x) = L(\lambda) : \tag{9.465}$$

$$\boxed{\textbf{KC.3}} : \boxed{L(\lambda) \begin{cases} \in [0, +\infty) \ \text{pentru } \lambda > 1 \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \ \text{CONV}, \\ \in (0, +\infty] \ \text{pentru } \lambda \le 1 \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \ \text{DIV}. \end{cases}} \tag{9.466}$$

Comentarii. Desigur, acest criteriu **KC.3**: se poate reformula corespunzător pentru integrale improprii pe interval nemarginit spre $-\infty$, deci integrale de forma (9.447). Să mai menţionăm că el se poate aplica – în principiu – pentru *orice* funcţie (pozitivă) f, cu condiţia ca limita să existe şi să poată fi calculată. Nu este cazul să sugerăm clase de funcţii pentru care acest criteriu **KC.3** este mai adecvat sau mai uşor aplicabil, dar putem menţiona funcţiile putere (întreagă sau raţională), funcţiile polinomiale, cele raţionale dar şi funcţiile iraţionale, dacă se pot pune în evidenţă puteri generalizate (prin scoateri în factor forţat de puteri ale variabilei, de sub radicali). □

În fine, o dată stabilită *divergenţa* unei integrale improprii, calculul ei nu mai are sens (cu definiţia integralei improprii ca limită, v. (9.446 - (9.447), respectiv cu formula Newton-Leibniz generalizată, adică (9.449)) ci se poate scrie direct că

$$I = +\infty \;/\; I = -\infty,$$

în raport cu semnul funcţiei pe interval. Dar dacă se constată, cu unul din criterii, că o anumită integrală improprie este **CONV**ergentă, calculul acesteia are sens şi se pot încerca formulele de definiţie (9.446 - (9.447) sau formulele (9.449). Însă toate aceste formule necesotă cunoaşterea primitivei funcţiei f, ceea ce poate fi o problemă dificilă sau chiar imposibilă dacă f nu admite primitive exprimabile prin funcţii elementare. În multe culegeri de probleme sau în manuale unde se prezintă aplicaţii cu integrale improprii se poate cere doar stabilirea naturii integralei, nu şi găsirea valorii acesteia. Exemplele ce urmează vor ilustra diverse situaţii care pot să apară.

Ex.9.3 - 4 Să se cerceteze convergenţa integralelor de mai jos.

$$(i)\quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x + \sqrt[3]{x^2+1} + 5}; \qquad (ii)\quad \int_1^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^5+1}};$$

$$(iii)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}; \qquad (iv)\quad \int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{\sqrt{|x|}\,(x^2+1)}.$$

Pentru integrala (iii) se cere şi valoarea acesteia.

(i) Puterea dominantă a termenilor de la termenilor de la numitorul funcţiei este $=1$, deci integrala va avea aceeaşi comportare cu integrala din (9.463) şi va fi deci divergentă. Pentru o justificare mai riguroasă a acestei afirmaţii calculăm

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^\lambda}{2x + \sqrt[3]{x^2+1} + 5} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^\lambda}{x(2 + \sqrt[3]{(1/x) + (1/x^3)} + 5/x)} = \frac{1}{2} \text{ pentru } \lambda = 1.$$

Conform cu criteriul **KC.3** Din (9.466), integrala este divergentă şi se poate scrie că

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x + \sqrt[3]{x^2+1} + 5} = +\infty . \qquad \square$$

(*ii*) Cu acelaşi criteriu, se poate constata că $L = 1$ pentru $\lambda = 3/2 > 1 \Rightarrow$ CONV.

Integrala este iraţională binomă întrucât ea se paote rescrie sub forma

$$\int_1^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^5+1}} = \int_1^{+\infty} x\,(x^5+1)^{-1/2}\,dx \Rightarrow m = 1,\ n = 5,\ p = -1/2. \tag{9.467}$$

Se cosntată că nici unul din cele trei cazuri care ar permite aplicarea unei substituţii de tip Čebyšev nu este varificat de exponenţii din (9.467), deci integrala – deşi există în $\mathbb{R}$ – nu poate fi calculată folosind formula Newton-Leibniz spre a găsi $I(t)$, respectiv pentru a aplica prima din formulele N-L generalizate (9.449). $\square$

(*iii*) Integrala este convergentă întrucât criteriul **KC.3** conducee la $L = 1$ pentru $\lambda = 2 > 1$. Pentru a o calcula se caută o primitivă a funcţiei-integrand. Întrucât numitorul acesteia are rădăcini complexe, funcţia de integrat este o fracţie simplă iar primitiva sa va implica funcţia arctg :

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 9} = \int \frac{dx}{(x+2)^2 + 5} = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{\sqrt{5}} . \tag{9.468}$$

Având în vedere faptul că intervalul de integrae este nemărginit în ambele sensuri, integrala se va descompune ca sumă de două integrale, pe semiaxa reală negativă şi pe cea pozitivă:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+4x+9} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9} \underset{(9.468)}{=}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{5}} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) + \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{5}} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{5}} . \qquad \square$$

(*iv*) Întrucât funcţia de sub integrală conţine $|x|$, aceasta se poate rescrie sub forma

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{\sqrt{|x|}\,(x^2+1)} = \int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{\sqrt{-x}\,(x^2+1)} . \tag{9.469}$$

Criteriul **KC.3** conduce la

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{(-x)^{\lambda}}{\sqrt{-x}\,(x^2+1)} = 1 \text{ pentru } \lambda = \frac{5}{2} \;\Rightarrow\; \text{CONV.} \tag{9.470}$$

În (9.470) am înlocuit variabila x din criteriu cu $|x| = -x$, dar această mică modificare aparentă a criteriului este cam întotdeauna necesară când intervalul de integrare este pe semiaxa negativă, spre a se evita scrierea lui $x^{\lambda} : x < 0$ sub o putere reală ! De fapt, această problemă se poate evita uşor procedând la schimbarea de variabilă $x \to u = -x$, care transformă şi intervalul de integrare din $(-\infty, -1]$ în $[1, +\infty)$. Cu această substituţie integrala din (9.470) devine

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{\sqrt{-x}\,(x^2+1)} = \int_{1}^{+\infty} \frac{du}{\sqrt{u}\,(u^2+1)}, \tag{9.471}$$

care este o integrală iraţională dintre cele mai simple, cu funcţia-integrand de forma $R(x, \sqrt{x})$. Substituţia adequată este

$$\sqrt{u} = v \;\Rightarrow\; \int_{1}^{+\infty} \frac{du}{\sqrt{u}\,(u^2+1)} = \int_{1}^{+\infty} \frac{2\,dv}{v^4+1} \underset{\text{not}}{=} I. \tag{9.472}$$

Funcţia raţională de sub integrală se descompune sub forma

$$\frac{2}{v^4+1} = \frac{2}{(v^2 - \sqrt{2}v + 1)(v^2 + \sqrt{2}v + 1)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{v + \sqrt{2}}{v^2 + \sqrt{2}v + 1} - \frac{v - \sqrt{2}}{v^2 - \sqrt{2}v + 1} \right). \tag{9.473}$$

$$(9.473) \;\Rightarrow\; I(t) = \int_{1}^{t} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{v + \sqrt{2}}{v^2 + \sqrt{2}v + 1} - \frac{v - \sqrt{2}}{v^2 - \sqrt{2}v + 1} \right) dv =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{1}^{t} \left(\frac{(2v + \sqrt{2}) + \sqrt{2}}{v^2 + \sqrt{2}v + 1} - \frac{(2v - \sqrt{2}) - \sqrt{2}}{v^2 - \sqrt{2}v + 1} \right) dv =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\ln \frac{v^2 + \sqrt{2}v + 1}{v^2 - \sqrt{2}v + 1} \right]_{1}^{t} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{1}^{t} \left(\frac{\sqrt{2}}{v^2 + \sqrt{2}v + 1} + \frac{\sqrt{2}}{v^2 - \sqrt{2}v + 1} \right) dv =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{t^2 + \sqrt{2}\,t + 1}{t^2 - \sqrt{2}\,t + 1} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} + I_2(t), \tag{9.474}$$

unde

$$I_2(t) = \frac{1}{2}\int_1^t \left(\frac{1}{v^2 + \sqrt{2}\,v + 1} + \frac{1}{v^2 - \sqrt{2}\,v + 1} \right) dv =$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^t \left(\frac{1}{(v + 1/\sqrt{2})^2 + 1/2} + \frac{1}{(v - 1/\sqrt{2})^2 + 1/2} \right) dv =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} [\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\,v + 1)]_1^t + \frac{1}{\sqrt{2}} [\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\,v - 1)]_1^t =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \Big[\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\,t + 1) + \operatorname{arctg}(\sqrt{2}\,t - 1) - \operatorname{arctg}(\sqrt{2} + 1) - \operatorname{arctg}(\sqrt{2} - 1) \Big]. \tag{9.475}$$

Trecând la limită, pentru $t \to +\infty$, în (9.474) & (9.475) se găseşte valoarea

$$I = \lim_{t \to +\infty} I(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} [\pi - \operatorname{arctg}(\sqrt{2} + 1) - \operatorname{arctg}(\sqrt{2} - 1)].$$

Integrale improprii din funcţii nemărginite

Pentru definirea integralei Riemann s-a presupus că funcţia de integrat era *mărginită* pe un interval mărginit $[a, b]$. Aceea şi proprietate a fost admisă şi pentru introducerea integralelor improprii pe intervale nemărginite, în acest caz $[a, +\infty)$, respectiv $(-\infty, b]$: a se vedea *Def. 9.3.1* pentru aceste integrale improprii care – în unele manuale de ANALIZĂ – sunt desemnate drept *integrale improprii de specia I-a*.

În cazul în care intervalul J admite un punct de acumulare în vecinătatea căruia funcţia este nemărginită, se poate defini o integrală generalizată printr-o trecere la limită, anlog cu maniera în care s-au definit nintegralele improprii de prima specie.

Definiţia 9.3.2. Fie $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie reală mărginită şi integrabilă pe orice interval de forma $[a, t] \subset [a, b)$, $(a \le t < b)$. Dacă există, în $\mathbb{R}$, limita

$$\lim_{t \nearrow b} \int_a^t f(x)\, dx = I \in \mathbb{R} \tag{9.476}$$

atunci acest număr real I reprezintă integrala (improprie) din funcţia f pe intervalul nemărginit $[a\,,b)$ şi se foloseşte notaţia

$$\boxed{\lim_{t \nearrow b} \int_a^t f(x)\,dx \underset{\text{def}}{=} \int_a^{b^-} f(x)\,dx\,.} \tag{9.477}$$

Comentarii. **1°** În cadrul acestei definiţii nu am presupus, la modul explicit, că funcţia ar fi nemărginită într-o vecinătate (la stânga) a punctului b dar această proprietate face definiţia relevantă ; dacă funcţia este mărginită în orice vecinătate a acestui punc sau este chiar definită în b atunci definiţia din (9.477) devine banală sau superfluă, în sensul că limita respectivă este chiar integrala Riemann obişnuită :

$$\lim_{t \nearrow b} \int_a^t f(x)\,dx = \int_a^{b^-} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Aşadar, definiţia din (9.477) este efectiv o generalizare a integralei definite în sens Riemann.

2° Conform ipotezei de nemărginire a funcţiei într-o vecinătate a punctului b rezultă că dreapta verticală de ecuaţie $(x = b)$ este o asimptotă verticală la graficul funcţiei (Γ_f).

3° Într-o manieră analoagă cu cea din *Definiţia 9.3.2* se definesc şi integralele pe intervale având punctul singular (spre care funcţia devine nemărginită) ca extremitate stângă :

$$\boxed{\lim_{s \searrow a} \int_s^b f(x)\,dx \underset{\text{def}}{=} \int_{a^+}^b f(x)\,dx\,.} \tag{9.478}$$

Se pot defini şi integrale improprii în cazul în care punctul în vecinătatea căruia funcţia este nemărginită e situat chiar în interiorul intervalului de integrare :

$$c \in \operatorname{int} J\,,\ J = [a\,,b] \ \Rightarrow\ c \in (a\,.\,b)\,; \tag{9.479}$$

aşadar, $(x = c)$ este o asimptotă verticală la graficul funcţiei (Γ_f). În acest caz, integrala pe intervalul din (9.479) se descompune în mod necesar ca sumă de două integrale, de tipurrile (9.477) şi (9.478), respectiv :

$$\boxed{\int_a^b f \underset{\text{def}}{=} \int_a^{c^-} f + \int_{c^+}^b f\,.} \tag{9.480}$$

Evident, pentru convergenţa integralei din (9.480) este necesară convergenţa ambelor integrale din membrul drept.

4° În monografia [Gh, Sireţchi, 1985] se oferă o tratare detaliată a integralelor improprii de ambele specii, dar cu notaţiile din (9.477) & (9.478) şi pentru integralele pe intervale nemărginite. Se prezintă şi alte criterii de convergenţă decât **KC.1 – 3** precum şi analoagele lor pentru integrale din funcţii nemărginite (de specia a doua), care urmează după două exemple. Spaţiul limitat al acestui compendiu *online* nu ne permite să insistăm asupra numeroaselor proprietăţi şi rezultate de convergenţă aferente integralelor improprii.

□

Ex.9.3 – 5 Să se determine valoarea integralelor de mai jos, împlicit natura lor.

(*i*) $I = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x - a}}, \; b > a \geq 0$; **(*ii*)** $J = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{|x|}}, \; a < 0 < b$.

(*i*) Integrala este improprie în limita inferioară, în care funcţia are ca asimptotă verticală dreapta $(x = a)$.

$$I(s) = \int_s^b \frac{dx}{\sqrt{x - a}} = \left[2\sqrt{x - a}\,\right]_s^b = 2\left(\sqrt{b - a} - \sqrt{s - a}\,\right). \tag{9.481}$$

(9.481) $\Rightarrow \quad I = \lim\limits_{s \searrow a} 2\left(\sqrt{b - a} - \sqrt{s - a}\,\right) = 2\sqrt{b - a} \;\Rightarrow$ CONV.

(*ii*) Integrala se descompune pe două subintervale :

$$J = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = \int_a^0 \frac{dx}{\sqrt{-x}} + \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{x}} = J_1 + J_2.$$

$$J_1 = \int_a^0 \frac{dx}{\sqrt{-x}} = \lim_{s \searrow a} \int_s^0 \frac{dx}{\sqrt{-x}} = \lim_{s \searrow a} 2\left[\sqrt{-x}\,\right]_0^s = 2\sqrt{-a}\;; \tag{9.482}$$

$$J_2 = \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{t \nearrow b} \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{t \nearrow b} 2\left[\sqrt{x}\,\right]_0^t = 2\sqrt{b}\;; \tag{9.483}$$

(9.482) & (9.483) $\Rightarrow \quad J = J_1 + J_2 = 2\left(\sqrt{-a} + \sqrt{b}\,\right) \;\Rightarrow$ CONV.

Criterii de convergenţă pentru integralele improprii de forma (9.477) / (9.478)

2 Criterii de comparaţie.

KC.4 Dacă $0 \le f(x) \le g(x)$ pe intervalul $[a, +\infty)$ atunci

$$(i) \quad \int_a^{b^-} g(x)\,dx \ \text{CONV} \Rightarrow \int_a^{b^-} f(x)\,dx \ \text{CONV}; \tag{9.484}$$

$$(ii) \quad \int_a^{b^-} f(x)\,dx \ \text{DIV} \Rightarrow \int_a^{b^-} g(x)\,dx \ \text{DIV}. \tag{9.485}$$

Acest criteriu se poate uşor generaliza, dacă se acceptă ca una din cele două funcţii să fie înmulţită cu o constantă *pozitivă şi nenulă*. O asemenea operaţie nu schimbă natura integralei, din punctul de vedere al convergenţei / divergenţei.

KC.5 (*Criteriul de comparaţie la limită*). Dacă există limita raportului

$$\lim_{x \nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in \overline{\mathbb{R}} = [0, +\infty] \tag{9.486}$$

atunci :

$$\begin{cases} (i) : L \in [0, +\infty) \ \& \ \int_0^{b^-} g \ \text{CONV} \Rightarrow \int_a^{b^-} f \ \text{CONV}, \\ (ii) : L \in (0, +\infty] \ \& \ \int_a^{b^-} g \ \text{DIV} \Rightarrow \int_a^{b^-} f \ \text{DIV}. \end{cases} \tag{9.487}$$

Acest criteriu rezultă din precedentul, **KC.4**, dacă limita din (9.486) este caracterizată, în cazul (i), în limbaj "$\varepsilon \to \delta(\varepsilon)$" iar în cazul (ii) cu limita $L \in \mathbb{R}$ tot cu aceste vecinătăţi. Ambele criterii **KC.4** & **KC.5** se vor reformula corespunzător pentru integralele de forma (9.478), cu punctul singular în limita din stânga a intervalului de integare, înlocuindu-se b^- cu a^+ şi

$$\lim_{x \nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = L \ \text{cu} \ \lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = M. \tag{9.488}$$

Un criteriu (sau o pereche de criterii) specific(e) se va obţine după studiul a două integrale iraţionale sau chiar mai generale, care urmează.

Ex.9.3 – 6 Să se determine valoarea integralelor de mai jos, împlicit natura lor.

$$(\boldsymbol{i}) \quad I = \int_a^b \frac{1}{(x-a)^{\alpha}}\,dx\,,\ b > a \geq 0\,; \qquad (\boldsymbol{ii}) \quad J = \int_a^b \frac{1}{(b-x)^{\beta}}\,dx\,,\ b > a \geq 0\,.$$

(*i*) Pentru $\alpha \leq 0$ integrala nu este improprie ci este o integrală Riemann care se calculează folosind primitiva funcţiei putere ; deci $\alpha \geq 0$ este un caz de convergenţă. Integrala devine improprie pentru $\alpha > 0$; ea este improprie în limita inferioară, în care funcţia are ca asimptotă verticală dreapta $(x = a)$.

$$I(s) = \int_s^b \frac{1}{(x-a)^{\alpha}}\,dx = \frac{1}{1-\alpha}\left[\,(x-a)^{1-\alpha}\,\right]_s^b =$$
$$= \frac{1}{1-\alpha}\left[(b-a)^{1-\alpha} - (s-a)^{1-\alpha}\right]. \tag{9.489}$$

Trecând la limită pentru $s \searrow a$ şi $\alpha > 0$ în (9.489) se ajunge la

$$\lim_{s \searrow a} I(s) = \lim_{s \searrow a} \frac{1}{1-\alpha}\left[(b-a)^{1-\alpha} - (s-a)^{1-\alpha}\right] =$$
$$= \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}(b-a)^{1-\alpha} & \text{pentru } \alpha < 1, \\ +\infty & \text{pentru } \alpha > 1. \end{cases} \tag{9.490}$$

Aşadar, $0 < \alpha < 1$ este un caz de CONVergenţă pentru integrala din **(*i*)**. Valoarea $\alpha = 1$ nu este un caz de dubiu ci unul de DIVergenţă întrucât, pentru această valoare a parametrului,

$$I(s) = \int_s^b \frac{1}{x-a}\,dx = \left[\,\ln(x-a)\right]_s^b = \ln(b-a) - \ln(s-a) \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{s \searrow a} I(s) = \lim_{s \searrow a}\left[\ln(b-a) - \ln(s-a)\right] = \ln(b-a) - (-\infty) = +\infty.$$

Deci natura integralei din **(*i*)**, în funcţie de valorile lui $\alpha \in \mathbb{R}$, este dată de

$$I = \int_a^b \frac{1}{(x-a)^{\alpha}}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}(b-a)^{1-\alpha} & \Rightarrow \text{CONV pentru } \alpha \in (0,1), \\ +\infty & \Rightarrow \text{DIV} \quad \text{pentru } \alpha \in [1,+\infty). \end{cases} \tag{9.491}$$

Pentru integrala din **(*ii*)** studiul naturii este perfect analog şi se ajunge la

$$J = \int_a^b \frac{1}{(b-x)^\beta}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\beta}(b-a)^{1-\beta} & \Rightarrow \text{ CONV pentru } \beta \in (0,1), \\ +\infty & \Rightarrow \text{ DIV } \quad \text{pentru } \beta \in [1,+\infty). \end{cases} \tag{9.492}$$

Aplicând criteriul de comparaţie la limită **KC.5** cu $g(x)$ = funcţia-integrand din **(*i*)**, apoi cu $h(x)$ = funcţia-integrand din **(*ii*)**, se ajunge la câte un criteriu de convergenţă analog cu **KC.3**, pentru integralele

$$\int_a^{b^-} f(x)\,dx \quad \& \quad \int_{a^+}^{b} f(x)\,dx. \tag{9.493}$$

dar numai după calcularea limitelor :

$$\lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{1/(x-a)^\alpha} = \lim_{x \searrow a} (x-a)^\alpha f(x) \underset{\text{not}}{=} L(\alpha)\,; \tag{9.494}$$

$$\lim_{x \nearrow b} \frac{f(x)}{1/(b-x)^\beta} = \lim_{x \nearrow b} (b-x)^\beta f(x) \underset{\text{not}}{=} M(\beta)\,. \tag{9.495}$$

Cazurile de convergenţă / divergenţă ale celor două tipuri de integrale din (9.494) & (9.495) sunt :

$$\boxed{\textbf{KC.6}} : \boxed{L(\alpha) \begin{cases} \in [0,+\infty) \text{ pentru } \alpha < 1 \Rightarrow \int_{a^+}^b f(x)\,dx \text{ CONV}, \\ \in (0,+\infty] \text{ pentru } \alpha \geq 1 \Rightarrow \int_{a^+}^b f(x)\,dx \text{ DIV}. \end{cases}} \tag{9.496}$$

$$\boxed{\textbf{KC.7}} : \boxed{M(\beta) \begin{cases} \in [0,+\infty) \text{ pentru } \beta < 1 \Rightarrow \int_a^{b^-} f(x)\,dx \text{ CONV}, \\ \in (0,+\infty] \text{ pentru } \beta \geq 1 \Rightarrow \int_a^{b^-} f(x)\,dx \text{ DIV}. \end{cases}} \tag{9.497}$$

Ca exemple, putem observa că cele două integrale din Ex.9.3 – 5 verificau aceste două criterii de convergenţă cu $\alpha = 1/2$ pentru integrala din **(*i*)**, respectiv cu $\alpha = 1/2$ şi $\beta = 1/2$ pentru cele două integrale în care s-a descompus integrala din **(*ii*)**, la pag. 323. Oferim alte câteva exemple.

Ex.9.3 – 7 Se cere stabilirea naturii integralelor ce urmează şi – eventual – calculul lor în cazul convergenţei.

(i) $I_1 = \int_1^2 \frac{1}{\ln x}\,dx$; (ii) $I_2 = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}}\,dx$;

(iii) $I_3 = \int_{-1}^1 \frac{\ln(2+\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}}\,dx$; (iv) $I_4 = \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}\,dx$.

(i) Integrala este improprie în limita inferioară întrucât $\lim\limits_{x \searrow 1} \ln x = 0$.

$$\lim_{x \searrow 1} \frac{(x-1)^{\alpha}}{\ln x} = \lim_{x \searrow 1} \frac{(x-1)^{\alpha}}{\ln[(x-1)+1]} = \frac{1}{\lim\limits_{u \searrow 0} \dfrac{\ln(u+1)}{u^{\alpha}}} =$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{u \searrow 0} \dfrac{\ln(u+1)}{u \cdot u^{\alpha-1}}} \underset{\text{not}}{=} L(\alpha). \qquad (9.498)$$

Limita din (9.498) este finită şi pozitivă pentru $\alpha = 1$, conform cu limita cunoscută

$$\lim_{u \searrow 0} \frac{\ln(u+1)}{u} = \ln e = 1 = L(1).$$

Conform cu limita din (9.494) şi **KC.6** integrala DIVerge.

(ii) Integrala este improprie în ambele extremităţi ale intervalului de integrare întrucât numitorul tinde la zero. Ea se descompune sub forma

$$I_2 = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}}\,dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}}\,dx \underset{\text{not}}{=} J_2 + K_2. \qquad (9.499)$$

Fiecare din cele două integrale din ultima ecuaţie este convergentă ; putem aplica criteriul din (9.497) doar pentru a doua din ele întrucât ele au aceeaşi comportare :

$$\lim_{x \nearrow 1} \frac{(1-x)^{\beta}}{\sqrt[3]{1-x^2}} = \lim_{x \nearrow 1} \frac{(1-x)^{\beta}}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x)}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \quad \text{pentru} \quad \beta = \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow \text{CONV.}$$

Având în vedere această concluzie pentru K_2, valabilă şi pentru J_2, valoarea integralei din (9.499) se poate obţine drept dublul valorii uneia din ele întrucât funcţia-integrand este pară iazr intervalul de integrare este simetric :

$$I_2 = J_2 + K_2 = 2K_2 = 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}}\,dx. \tag{9.500}$$

Această integrală din (9.500) este una iraţională şi poate fi abordată ca o *integrală binomă*, cu cei trei parametri

$$m = 0,\ n = 2,\ p = -1/3. \tag{9.501}$$

Din aceste valori rezultă că primitiva nu se poate exprima prin funcţii elementare, deci nu se poate utiliza formula Newton-Leibniz pentru a găsi $K_2(t)$ şi apoi valoarea căutată, cu limita din definiţie.

(*iii*) Ca şi integala precedentă, şi aceasta trebuie descompusă pe cele două subintervale simetrice :

$$I_3 = \int_{-1}^1 \frac{\ln(2+\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \int_{-1}^0 \frac{\ln(2+\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}}\,dx + \int_0^1 \frac{\ln(2+\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}}\,dx = J_3 + K_3. \tag{9.502}$$

Punctul singular este originea şi avem de calculat

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{x^{\alpha}\ln(2+\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}} = \ln 2 \text{ pentru } \alpha = \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow K_3 \text{ CONV.} \tag{9,503}$$

Rezultatul din (9.503) este valabil şi pentru integrala J_3. Pentru calculul integralelor se poate utiliza o substituţie similară cu cea de la integrala **(*i*)** :

$$u = \sqrt[3]{x} \Rightarrow x = u^3 \Rightarrow dx = 3u^2 du \ \& \ \begin{cases} x = 0 \Rightarrow u = 0, \\ x = 1 \Rightarrow u = 1. \end{cases} \tag{9.504}$$

$$(9.504) \Rightarrow K_3 = 3\int_0^1 \frac{\ln(2+u)}{u}\,u^2 du = 3\int_0^1 u\ln(2+u)\,du. \tag{9.505}$$

Integrala din (9.505) se poate calcula cu metoda IPP. Se găseşte

$$K_3 = \frac{3}{2}\int_0^1 u\ln(2+u)\,du = \frac{3}{2}\left[u^2\ln(2+u) - \frac{u^2}{2} + 2u - 4\ln(2+u)\right]_0^1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ K_3 = \frac{3}{2}\left(-3\ln 3 - \frac{1}{2} + 2 + 4\ln 2\right) = \frac{9}{4} + 6\ln 2 - \frac{9}{2}\ln 3 . \qquad (9.507)$$

Pentru integrala J_3 se poate utiliza tot substituţia din (9.504) dar limitele de integrare în u sunt diferite :

$$u = \sqrt[3]{x}\ \Rightarrow\ x = u^3\ \Rightarrow\ dx = 3u^2 du\ \ \&\ \begin{cases} x = -1\ \Rightarrow\ u = -1, \\ x = 0\ \Rightarrow\ u = 0 . \end{cases} \qquad (9.507)$$

$$(9.507)\ \Rightarrow\ J_3 = 3\int_{-1}^{0} \frac{\ln(2+u)}{u}\, u^2 du = 3\int_{-1}^{0} u\ln(2+u)\, du . \qquad (9.508)$$

Cu aceeaşi metodă a integrării prin părţi,

$$J_3 = \frac{3}{2}\int_{-1}^{0} u\ln(2+u)\, du = \frac{3}{2}\left[u^2\ln(2+u) - \frac{u^2}{2} + 2u - 4\ln(2+u)\right]_{-1}^{0}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ J_3 = \frac{3}{4}\left(-4\ln 2 + \frac{1}{2} + 2\right) = \frac{15}{4} - 6\ln 2 . \qquad (9.509)$$

În fine, (9.507) & (9.509) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow\ \boxed{I_3 = J_3 + K_3 = \frac{9}{4} + 6\ln 2 - \frac{9}{2}\ln 3 + \frac{15}{4} - 6\ln 2 = 6 - \frac{9}{2}\ln 3 .}$$

Observaţie. Integrala din enunţ era una improprie, dar prin substituţia din (9.504) care a condus la integrala din (9.505) acest caracter a dispărut, datorită unei simplificări prin u .

(iv) Integrala este improprie în limita superioară. Se poate utiliza **KC.7** :

$$\lim_{x \nearrow 1} (1-x)^{\beta} f(x) = \lim_{x \nearrow 1} \frac{x^3(1-x)^{\beta}}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}} =$$

$$= \lim_{x \nearrow 1} \frac{x^3(1-x)^{\beta}}{(1-x)^{5/3}(1+x)^{5/3}} = \frac{1}{2^{5/3}}\ \text{pentru}\ \beta = \frac{5}{3}\ \Rightarrow\ I_4\ \text{DIV.}$$

Exerciţii cu integrale improprii.

9.3 A - 1 Se cere stabilirea naturii integralelor ce urmează şi – eventual – calculul lor în cazul convergenţei.

3 A 1.1 $I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$;

3 A 1.2 $I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\, dx$;

3 A 1.3 $I_3 = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin x\, dx,\ a>0$;

3 A 1.4 $I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^5+1}}\, dx$;

3 A 1.5 $I_5 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}\,(a+x)}\, dx\ ,\ a>0$;

3 A 1.6 $I_6 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^4+1}}\, dx$.

9.3 A - 2 Se cere stabilirea naturii integralelor ce urmează şi – eventual – calculul lor în cazul convergenţei.

3 A 2.1 $J_1 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}$;

3 A 2.2 $J_2 = \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$;

3 A 2.3 $J_3 = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$;

3 A 2.4 $J_4 = \int_0^{\pi} \frac{dx}{5-4\cos x}$;

3 A 2.5 $J_5 = \int_2^4 \frac{3+\cos x}{(x-2)^2}\, dx$;

3 A 2.6 $J_6 = \int_0^1 \ln(1-x)\, dx$.

Răspunsuri şi recomandări de rezolvare **9.3 A - 1**

3 A 1.1 Criteriul **KC.3** conduce la un caz de CONVergenţă $(\lambda = 2)$;

3 A 1.2 Integrala este similară cu precedenta, CONVergentă cu acelaşi λ. $I_2 = \frac{\pi^2}{8}$.

3 A 1.3 Criteriul **KC.3** conduce la un caz de CONVergenţă întrucât $L(\lambda) = 0$ pentru orice $\lambda > 0$, inclusiv pentru $\lambda > 1 \Rightarrow$ conv. Valoarea integralei se obţine integrând prin părţi, de două ori :

$$I_3 = \frac{1}{1 + a^2}.$$

3 A 1.4 Acelaşi criteriul **KC.3** cu limita $L(3/2) = 1$ oferă *convergenţa*. Se poate încerca determinarea primitivei şi valorii integralei cu o substituţie specifică integralelor iraţionale binome.

$m = 1,\ n = 5,\ p = -1/2.$

Rezultă că primitiva nu este exprimabilă prin funcţii elementare.

3 A 1.5 Intervalul de integrare este nemărginit (spre $+\infty$) dar funcţia nu este definită în extremitatea stângă a intervalului de integrare, deci trebuie studiată comportarea ei şi în aceste punct. Integrala este improprie de ambele specii, I & II.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\lambda} \sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}\,(a+x)} = 0$$

pentru $\lambda = 3/2$ întrucât

$$\left| \frac{x^{3/2} \sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}\,(a+x)} \right| \leq \frac{x^{3/2}}{\sqrt{x}\,(a+x)} = \frac{1}{1 + a/x} \to 0 \text{ pentru } x \to +\infty\,; \tag{9.510}$$

această limită din (9.510) arată că integrala este *absolut convergentă* în limita superioară, ceea ce nu înseamnă că ea este şi simplu convergentă. Funcţia de sub integrală nu este una pozitivă (sau nenegativă) din cauza factorului $\sin\sqrt{x}$ care are semn variabil când $x \to +\infty$. Integrala din enunţ s-ar putea scrie ca sumă de integrale pe intervalele

$$(0,1) \cup [1, +\infty) = (0, +\infty) \text{ sau } (0, \sqrt{\pi/2}) \cup [\sqrt{\pi/2}, +\infty) = (0, +\infty). \tag{9.511}$$

Pentru a doua partiţie din (9.511), pe intervalul finit funcţia de integrat este chiar pozitivă, deci se poate aplica fără probleme criteriul **KC.6** cu limita din (9.496) :

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{x^{\alpha} \sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}\,(a+x)} = \lim_{x \searrow 0} \frac{x^{\alpha}}{a+x} = L(\alpha), \tag{9.512}$$

de unde rezultă că $L(\alpha) = 0$ pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, inclusiv pentru $\alpha \in (0,1) \Rightarrow$ CONV.

3 A 1.6 Integrala se descompune ca sumă de două integrale, pe cele două semiaxe ale axei reale :

$$I_6 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^4+1}}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^4+1}}\,dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^4+1}}\,dx = J_6 + K_6. \tag{9.513}$$

Criteriul de convergenţă / divergenţă **KC.3** poate fi aplicat uneia dintre cele două integrale, comportarea acestora fiind simetrică.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\lambda+2}}{\sqrt[3]{x^4+1}} = 1 \quad \text{pentru} \quad \lambda + 2 = 4/3 \;\Rightarrow\; \lambda = -2/3 < 1 \;\Rightarrow\; \text{DIVergenţa.}$$

Răspunsuri şi recomandări de rezolvare 9.3 A - 2

3 A 2.1 Funcţia-integrand se poate rescrie sub forma

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}} = \frac{1}{(1-x)^{1/4}(1+x)^{1/4}(1+x^2)^{1/4}} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \nearrow 1} (1-x)^{\beta} f(x) = \lim_{x \nearrow 1} \frac{(1-x)^{\beta}}{(1-x)^{1/4}(1+x)^{1/4}(1+x^2)^{1/4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{9.514}$$

pentru $\beta = 1/4 \;\Rightarrow\; J_1$ CONVerge. Valoarea ei se poate găsi cu o substituţie specifică unei integrale iraţionale binome (cazul al treilea de la substituţiile lui Čebyšev) :

$$\sqrt[4]{\frac{1}{x^4} - 1} = t \;\Rightarrow\; \ldots \;\Rightarrow\; x = (t^4+1)^{-1/4} \;\Rightarrow \tag{9.515}$$

$$\Rightarrow\; dx = \frac{-t^3\,dt}{(t^4+1)^{5/4}}\,du \;\;\&\;\; \begin{cases} x = 0 \;\Rightarrow\; t = +\infty, \\ x = 1 \;\Rightarrow\; t = 0\,. \end{cases} \tag{9.516}$$

Ţinând seama de semnul lui dx, noile limite din (9.516) se pot inversa iar integrala în t devine

$$J_1(t) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{t^4+1}\,dt\,. \tag{9.517}$$

Funcţia raţională de sub integrala din (9.517) trebuie descompusă în fracţii simple, plecând de la factorizarea numitorului

$$t^4 + 1 = (t^2 - \sqrt{2}\,t + 1)(t^2 + \sqrt{2}\,t + 1). \tag{9.518}$$

Prin aducere la acelaşi numitor, identificarea coeficienţilor şi rezolvarea sistemului algebric liniar (de tip 4 x 4) se ajunge la descompunerea

$$\frac{t^2}{t^4+1} = \frac{(1/2\sqrt{2})(t - 3/\sqrt{2} + 2)}{t^2 - \sqrt{2}\,t + 1} - \frac{(1/2\sqrt{2})(t - 3/\sqrt{2} - 2)}{t^2 + \sqrt{2}\,t + 1} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2}t - 3 - 2\sqrt{2}}{t^2 - \sqrt{2}\,t + 1} + \frac{-\sqrt{2}t + 3 + 2\sqrt{2}}{t^2 + \sqrt{2}\,t + 1} \right). \tag{9.519}$$

Primitiva în t (9.517) se va obţine integrând suma de fracţii simple din (9.519), fiecare din ele furnizând un logaritm natural şi o arc-tangentă. După găsirea primitivei se determină variaţia acesteia între 0 şi u, după care se ia limita pentru $u \to +\infty$, care va furniza valoarea căutată a integralei.

Cititorii interesaţi urmează a detalia calculele care au condus la integrala $J_1(t)$ din (9.517), apoi a verifica descompunerea în fracţii simple din (9.519) şi a calcula valoarea integralei, urmând sugestiile de mai sus.

3A2.2 Funcţia are ca punct singular limita inferioară a intervalului de integrare întrucât $\lim\limits_{x \searrow 1} \ln x = 0$. Se poate încerca aplicarea criteriului **KC.6** :

$$\lim_{x \searrow 1} \frac{(x-1)^{\alpha}}{x\sqrt{\ln x}} = \lim_{x \searrow 1} \frac{1}{x} \lim_{x \searrow 1} \frac{(x-1)^{\alpha}}{\sqrt{\ln x}} = \lim_{x \searrow 1} \frac{(x-1)^{\alpha}}{\sqrt{\ln x}} = L(\alpha). \tag{9.520}$$

Limita din (9.520) se poate evalua pentru valoarea particulară a parametrului $\alpha = 1/2$:

$$L(1/2) = \lim_{x \searrow 1} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{\ln x}} = \sqrt{\frac{1}{\lim\limits_{x \searrow 1} \dfrac{\ln x}{x-1}}} \underset{\text{not}}{=} \frac{1}{\ell}. \tag{9.521}$$

Limita ℓ din (9.521) poate fi evaluată relativ usor :

$$\ell = \lim_{x \searrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \searrow 1} \left[\frac{1}{x-1} \ln(x - 1 + 1) \right] = \ln e = 1. \tag{9.522}$$

Limita din (9.522) este una din limitele cunoscute din capitolul **LIMITE DE FUNCŢII**. Din (9.521) & (9.522) rezultă că

$L(1/2) = 1 \Rightarrow$ CONVergenţa integralei din enunţ.

Calculul integralei este simplu avâ nd în vedere că primitiva este aproape imediată.

$$J_2 = \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \int_1^e (\ln x)^{-1/2} d\ln x = 2\left[\sqrt{\ln x}\right]_1^e = 2.$$

3A2.3 Integrala este improprie în ambele capete ale intervalului de integrare, ceea ce este şi mai vizibil dacă ea este rescrisă sub forma

$$J_3 = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}} = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(1-x)^{1/3}(1+x)^{1/3}}. \tag{9.523}$$

Aceleaşi criterii **KC.6** & **KC.7**, aplicate succesiv pentru cele două limite de integrare, conduc la concluzia ca ambele integrale în care se descompune J_3, pe intervalele $(-1,0)$ & $[0,1)$ respectiv, sunt convergente întrucât limitele din (9.494) & (9.495) sunt

$$L(1/3) = M(1/3) = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \Rightarrow \text{CONVergenţa.} \tag{9.524}$$

În consecinţă, integralei din (9.523) i se poate aplica proprietatea privind integrarea funcţiilor pare pe interval simetric şi putem deci scrie

$$J_3 = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}} = 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}. \tag{9.525}$$

Aceasta este o integrală binomă cu cei trei parametri $m = 0,\ n = 2,\ p = -1/3$ care este un caz în care primitiva nu este exprimabilă prin funcţii elementare. Ea poate fi totuşi calculată cu ajutorul **integralelor lui Euler**,

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx, \quad B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx. \tag{9.526}$$

Aceste două integrale converg pentru valorile strict pozitive ale parametrilor p & q. Dacă, în (9.524), se aplică substituţia $x^2 = y$ atunci

$$J_3 = 2B(1/2, 2/3) \tag{9.527}$$

iar această valoarea poate fi găsită cu o aproximaţie suficient de bună întrucât integralele lui Euler sunt tabelate în diverse cărţi de ANALIZĂ NUMERICĂ, PROBABILITĂŢI etc.

Cititorul este invitat să detalieze calculele care au condus la limitele din (9.524) dar şi la expresia (9.527) a integralei J_3, cu definiţia din (9.526) a funcţiei Beta a lui Euler.

3 A 2.4 La prima vedere, integrala J_4 nu ar fi una improprie întrucât intervalul de integrare este mărginit iar numitorul funcţiei nu se anulează nicăieri.

Totuşi, J_4 se va transforma într-o integrală improprii după aplicarea substituţiei specifice, pentru a determina o primitivă.

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \;\Rightarrow\; \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \;\;\&\;\; dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}. \tag{8.528}$$

Cele două limite ale intervalului de integrare se transformă precum urmează :

$$\begin{cases} x = 0 \;\Rightarrow\; t = 0, \\ x = \pi \;\Rightarrow\; t = +\infty. \end{cases} \tag{9.529}$$

Funţia-integrand devine $$\frac{1}{5-4\cos x} = \frac{1}{5-4(1-t^2)/(1+t^2)} = \frac{1+t^2}{1+9t^2}. \tag{9.530}$$

(9,528), (9.529) & (9.530) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow J_4 \rightarrow J_4(t) = \int_0^{+\infty} \frac{1+t^2}{1+9t^2}\,\frac{2\,dt}{1+t^2} = 2\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+9t^2}. \tag{9.531}$$

Integrala din (9.531) are o primitivă imediată iar calculul ei revine cititorilor interesaţi.

3 A 2.5 $J_5 = \displaystyle\int_2^4 \frac{3+\cos x}{(x-2)^2}\,dx$ este improprie în 2 şi DIVerge, conform cu **KC.6** .

3 A 2.6 $$J_6 = \int_0^1 \ln(1-x)\,dx$$

este improprie în 1 dar CONVerge întrucât

$$L(\alpha) = \lim_{x \searrow 1} (1-x)^{\alpha} \ln(1-x) = 0$$

pentru orice $\alpha \in (0,1)$. Calculul valorii sale este facil, dacă se integrează o dată prin părţi.
