

Contract PN-II-RU-TE-2014-4-0004

Nr. 272/01.10.2015

Subvarietăți de curbura medie constantă și subvarietăți biarmonice

Director de proiect: prof. dr. Dorel Fetcu

Raport științific 2015-2017

În octombrie 2015, membrii echipei proiectului au demarat activitățile de cercetare științifică cu scopul atingerii obiectivelor propuse.

Astfel, am obținut primele rezultate legate de una din direcțiile de cercetare propuse prin obiectivul *Studiul subvarietăților biarmonice și biconservative în unele spații 3-dimensionale*, în articolul

- D. Fetcu, S. Nistor, C. Oniciuc, *On biconservative surfaces in 3-dimensional space forms*, *Comm. Anal. Geom.* 24 (2016), 1027 – 1045.

Suprafețele biconservative în forme spațiale, adică suprafețele pentru care se anulează partea tangentă a câmpului de bitensiune, care, în plus, nu au curbura medie constantă, au fost studiate de către R. Caddeo, S. Montaldo, C. Oniciuc și P. Piu, și, într-un articol apărut în 2014, au fost determinate ecuațiile explicite ale acestor suprafețe din R^3 , S^3 și H^3 . În aceeași lucrare, autorii au arătat că, în cazul unor astfel de suprafețe, curbura gaussiană satisface o ecuație foarte asemănătoare cu cea folosită de G. Ricci-Curbastro în 1895, pentru a caracteriza suprafețele minimale de curbura gaussiană negativă în R^3 , și apoi de către H. B. Lawson, în 1970, pentru a generaliza acest rezultat în cazul suprafețelor de curbura medie constantă în forme spațiale. Suprafețele care satisfac această ecuație, numită condiția Ricci, sunt la rândul lor numite suprafețe Ricci, iar metricile riemanniene corespunzătoare pe aceste suprafețe sunt cunoscute drept metrici Ricci.

Încurajați de această similitudine, dintre ecuația satisfăcută de suprafețele biconservative și condiția Ricci, am demonstrat că suprafețele biconservative din R^3 , S^3 și H^3 pot fi transformate, într-o manieră simplă, în suprafețe Ricci. Mai mult, în cazul suprafețelor biconservative din R^3 am găsit, în mod explicit, metrica Ricci corespunzătoare.

În timp ce condiția Ricci caracterizează în mod intrinsec suprafețele minimale într-o formă spațială 3-dimensională $N^3(c)$, condiția similară satisfăcută de suprafețele biconservative, găsită de Caddeo, Montaldo, Oniciuc și Piu, nu este suficientă pentru a obține o astfel de caracterizare și în cazul acestora. În articolul nostru am rezolvat această problemă, găsind condițiile intrinseci necesare și suficiente pe care trebuie să le verifice o suprafață riemanniană pentru a putea fi scufundată local în $N^3(c)$ ca o suprafață biconservativă de curbura medie variabilă.

Aceste rezultate au fost prezentate de către Cezar Oniciuc în cadrul simpozionului științific

prilejuit de “Zilele Universității „Al. I. Cuza” din Iași” (23 octombrie 2015) și de către Simona Nistor în cadrul conferinței internaționale “Applied and Pure Mathematics (ICAPM 2015)” (6-8 noiembrie 2015), organizată de Departamentul de Matematică și Informatică din cadrul Universității Tehnice „Gheorghe Asachi” din Iași.

În această etapă a proiectului nu s-au efectuat deplasări suportate din proiect și nici nu s-au efectuat cheltuieli de logistică. Devizul cadru antecalcul a fost respectat.

Pe parcursul celui de-al doilea an al proiectului membrii echipei de cercetare au continuat activitățile din cadrul creionat de obiectivele propuse.

Un articol elaborat în acest an, abordând subiecte din cadrul obiectivelor **O1. Studiul subvarietăților de curbura medie paralelă** și **O2. Studiul subvarietăților biarmonice și biconservative în unele spații 3-dimensionale**, este

- E. Loubeau, C. Oniciuc, ***Constant mean curvature proper-biharmonic surfaces of constant Gaussian curvature in spheres***, J. Math. Soc. Japan 68 (2016), 997–1024.

În acest articol sunt studiate suprafețele de curbura medie constantă (CMC) în sferă (un caz mai general decât cel al suprafețelor de curbura medie paralelă) cu ipoteza suplimentară că acestea sunt și biarmonice. Folosind o clasificare a suprafețelor de tip finit în sfere datorată lui Myata, autorii obțin o descriere completă a acestor imersii și arată că pentru orice număr real dat h între 0 și 1 există plane și cilindri CMC propriu-biarmonici în sfera euclidiană de dimensiune 5 având curbura medie egală cu h . De asemeni este determinată condiția necesară și suficientă pe care trebuie să o verifice numărul h pentru a exista toruri CMC propriu-biarmonice de curbura medie h în această sferă. Lucrarea se încheie cu câteva rezultate privind suprafețele CMC plate imersate într-o sferă de dimensiune arbitrară.

Am continuat, dintr-o nouă perspectivă, acest studiu în articolul

- D. Fetcu, E. Loubeau, C. Oniciuc, ***Biharmonic tori in spheres***, *Differential Geometry and Its Applications*, va apărea,

unde este considerat cazul torurilor propriu-biarmonice de curbura medie constantă în sferă. Propunem aici o abordare diferită de cea din articolul precedent, plecând de la întrebarea când un tor dat admite o imersie CMC propriu-biarmonică într-o sferă euclidiană. Dezvoltăm acest studiu în cazul a două familii de toruri: toruri rectangulare cu o latură de lungime egală cu 1 și toruri pătrate. În primul caz determinăm expresiile tuturor acestor toruri rectangulare care admit imersii CMC propriu-biarmonice într-o sferă n -dimensională, ca și imersiile respective. Se demonstrează că singurele dimensiuni posibile pentru spațiul ambient sunt 5 și 7. Cazul torurilor pătrate este mai flexibil deoarece se demonstrează că există exemple de imersii CMC propriu-biarmonice a unor astfel de toruri în sfere având orice dimensiune impară mai mare sau egală cu 5.

O altă direcție de cercetare urmată de unul din membrii echipei este legată de obiectivul **O6. Studiul curbelor magnetice în spații produs**. În urma unui astfel de studiu a apărut articolul

- S. L. Druță-Romaniuc, J. I. Inoguchi, M. Munteanu, A. I. Nistor, *Magnetic curves in cosymplectic manifolds*, Rep. Math. Phys. 78 (2016), 33 – 48.

În acest articol sunt clasificate traiectoriile magnetice în raport cu câmpurile magnetice de contact în varietăți cosimplete de dimensiune arbitrară. Este de asemeni obținută clasificarea curbelor magnetice Killing în spații produs $M \times R$, unde M este o varietate riemanniană arbitrară bidimensională, precum și o teoremă de reducere pentru curbele magnetice în formele spațiale cosimplete de tip $M(k) \times R$, unde $M(k)$ este o formă spațială complexă de curbura secțională olomorfa constantă k . Mai exact, se demonstrează că o astfel de curbă stă într-un spațiu 3-dimensional $M(k) \times R$, aici $M(k)$ având dimensiunea reală egală cu 2.

Rezultate legate de obiectivul **O5**. *Studiul aplicațiilor biarmonice echivariante* au fost obținute în articolul

- S. Montaldo, C. Oniciuc, A. Ratto, *Reduction methods for the bienergy*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 61 (2016), 261 – 292.

Aici sunt dezvoltate unele idei introduse într-o lucrare din 2013 a primului și a celui de-al treilea autor. Studiul se concentrează pe metodele de reducere pentru bienergie. Aceste tehnici se dovedesc a fi foarte folositoare în obținerea de exemple de puncte critice ale bienergiei prin reducerea ecuației biarmonice (PDE de ordinul 4) la o ODE. În particular, sunt studiate difeomorfismele conforme biarmonice rotational simetrice între modele. Metoda de reducere este apoi aplicată pentru a studia o clasă amplă de imersii G -invariante în spațiul euclidian. Spre deosebire de cazul aplicațiilor armonice și, în particular, cel al imersiilor minimale, care a inspirat acest tip de studii, folosirea tehnicilor de reducere în studiul biarmonicității nu este încă foarte dezvoltat dar exemplele găsite în această lucrare sugerează că aceste metode pot fi folosite cu succes și în această situație.

Unul dintre doctoranzii care fac parte din echipa de cercetare, Simona Nistor, a adus o contribuție importantă la atingerea țintelor apărute în cadrul obiectivului **O2**. *Studiul subvarietăților biarmonice și biconservative în unele spații 3-dimensionale*, prin articolul

- S. Nistor, *Complete biconservative surfaces in R^3 and S^3* , J. Geom. Phys. 110 (2016), 130 – 153.

Articolul studiază suprafețele biconservative complete în spațiul euclidian 3-dimensional și în sfera euclidiană de dimensiune 3. Suprafețele biconservative în forme spațiale 3-dimensionale sunt caracterizate de faptul că gradientul funcției curbura medie este un vector propriu a operatorului formă, iar autoarea studiază proprietățile locale și globale ale acestor suprafețe având funcția curbura medie nonconstantă. Sunt determinate suprafețele riemanniene complete și simplu conexe care admit imersii biconservative în R^3 și S^3 , în timp ce aceste imersii sunt descrise explicit.

În ultimele nouă luni ale proiectului am continuat activitatea de cercetare după cum urmează.

Simona Nistor și Cezar Oniciuc au elaborat o lucrare în care prezintă rezultatele recente obținute în studiul suprafețelor biconservative în forme spațiale, legate de al doilea obiectiv al proiectului nostru.

- S. Nistor, C. Oniciuc, *Global properties of biconservative surfaces in R^3 and S^3* , *Proceedings of The International Workshop on Theory of Submanifolds, Istanbul Technical University, Turkey 2-4 June 2016*, va apărea.

În această lucrare sunt studiate proprietățile locale și globale ale suprafețelor biconservative, atât din punct de vedere extrinsec cât și din punct de vedere intrinsec, și sunt construite suprafețe biconservative complete non-CMC în spațiul euclidian R^3 și în sfera euclidiană S^3 .

De asemeni legat de obiectivul **O2.**, este un alt articol recent al Simonei Nistor,

- S. Nistor, *On biconservative surfaces*, *Differential Geometry and Its Applications*, va apărea,

care studiază suprafețele biconservative în varietăți riemanniene oarecare. Suprafețele biconservative fiind caracterizate de anularea divergenței unui câmp tensorial simetric S_2 de tip (1,1), anumite proprietăți ale acestora vor rezulta din proprietățile generale ale unui câmp tensorial simetric de tip (1,1) oarecare cu divergența nulă. Este determinată relația dintre biconservativitate, proprietatea operatorului formă A_H de a fi câmp tensorial Codazzi, olomorfia unei funcții Hopf generalizată și proprietatea suprafeței de a avea curbura medie constantă. Un alt rezultat important al acestei lucrări este o formulă de tip Simons pentru suprafețele biconservative, utilizată pentru a studia geometria unor astfel de suprafețe.

Probleme propuse de obiectivul **O6.** sunt abordate în două articole care o au drept coautor pe Ana-Irina Nistor:

- M. I. Munteanu, A. I. Nistor, *On some closed magnetic curves on a 3-torus*, *Math. Phys. Anal. Geom.* 20 (2017) 2, art. 8,

unde sunt considerate două câmpuri magnetice pe torul T^3 obținute din două forme de contact diferite din spațiul Euclidian tridimensional. Sunt investigate condițiile în care curbele magnetice corespunzătoare acestor două forme de contact sunt închise. Sunt găsite condiții de periodicitate care implică mulțimea numerelor raționale. Deoarece spectrul geodezicelor închise pe tor este analog cuantizării nivelelor de energie în modelele atomilor, condiția obținută a fost numită de către autorii lucrării *principiu de cuantizare*.

- J. Inoguchi, M. I. Munteanu, A. I. Nistor, *Magnetic curves in quasi-Sasakian 3-manifolds*, *Analysis and Mathematical Physics*, va apărea.

În acest articol sunt studiate traiectoriile magnetice corespunzătoare câmpurilor magnetice de contact în varietăți quasi-Sasakiene tridimensionale. Se arată că orice curbă magnetică este *curbă slant*, adică face unghi constant cu traiectoriile câmpului vectorial caracteristic. După cum se știe deja, traiectoriile magnetice în spațiul Euclidian tridimensional sunt elice. Mai mult, curbele magnetice în varietăți Sasakiene și cosimplete de dimensiune arbitrară sunt de asemenea elice. În mod special, este de

remarcat faptul că, în general, curbele magnetice în varietăți quasi-Sasakiene tridimensionale nu au această proprietate. În acest sens sunt prezentate exemple explicite de astfel de curbe magnetice de contact într-un spațiu quasi-Sasakian tridimensional care nu sunt elice. În încheiere, este definită o familie de conexiuni liniare, numite *conexiuni de tip Okumura*, față de care cele patru câmpuri tensoriale de structură sunt paralele. Mai mult, se dă o altă interpretare a curbelor magnetice, și anume, se rată că acestea sunt geodezice în raport cu aceste conexiuni.

Pași spre scrierea unei monografii dedicate subvarietăților biarmonice în varietăți riemanniene, al șaptelea obiectiv al proiectului, au fost făcuți prin elaborarea și publicarea pe internet a tezei de abilitare a directorului de proiect (teză care conține și rezultate legate de obiectivele trei și patru),

- ***Submanifolds with Parallel Mean Curvature and Biharmonic Submanifolds in Riemannian Manifolds***, www.researchgate.net, DOI: 10.13140/RG.2.2.29610.11204,

și de asemenea prin publicarea unui curs în limba română dedicat acestui subiect, care va apărea și în Brazilia, în limba portugheză, la editura Universității Federale din Bahia (Salvador), EDUFBA

- D. Fetcu, A. L. Pinheiro, ***Subvarietăți biarmonice în varietăți riemanniene***, Casa Editorială Demiurg, Iași, România, 2016, 90 pp. (ISBN 978-973-152-337-8)

Mobilități

Între 2 și 4 iunie 2016 Cezar Oniciuc a participat la conferința "International Workshop on Theory of Submanifolds" organizată la Istanbul, Turcia, de Istanbul Technical University. Ca speaker invitat el a susținut prezentarea "*Biconservative Surfaces*" și a fost chairperson pentru una din sesiunile din cadrul conferinței.

Între 3 și 8 iunie 2016, Dorel Fetcu a participat la "The XVIII-th International Conference Geometry, Integrability and Quantization" în Varna, Bulgaria. El a susținut prezentarea plenară cu titlul "*Biharmonic Surfaces with Parallel Mean Curvature in Complex Space Forms*" și a fost numit chairperson pentru una din sesiuni.

Dorel Fetcu, Simona Nistor și Cezar Oniciuc au participat la conferința "Differential Geometry and Its Applications" organizată în Brno, Cehia, de Masaryk University, între 11 și 15 iulie 2016. Dorel Fetcu a susținut prezentarea "*On Biconservative Surfaces*", iar Simona Nistor posterul "*Global Properties of Biconservative Surfaces*".

La invitația profesorului Eric Loubeau, Simona Nistor și Cezar Oniciuc au petrecut o săptămână, între 29 octombrie și 5 noiembrie 2016, în cadrul Departamentului de Matematică al UBO (University of Western Brittany) din Brest, Franța. Aici, împreună cu gazda lor, au lucrat la unele proiecte deja începute (cum ar fi articolul scris de Fetcu, Loubeau și Oniciuc menționat mai sus) și au

început și unele noi legate de asemeni de proiectul de față.

Între 1 și 8 aprilie 2017, Simona Nistor și Cezar Oniciuc au efectuat un stagiul de cercetare în cadrul Departamentului de Matematică al Universității din Cagliari la invitația profesorului Stefano Montaldo. În afară de activitățile obișnuite din cadrul unui astfel de stagiul, Simona Nistor a prezentat expunerea “*On biconservative submanifolds*”.

Un alt stagiul de cercetare a fost efectuat de Ana-Irina Nistor la Universitatea din Valenciennes, la invitația profesorului Luc Vrancken, între 28 martie și 4 aprilie 2017. Aici a prezentat rezultatele recente obținute în articolele menționate mai sus, în expunerea “*Contact magnetic curves: classification results*”.

Dorel Fetcu, Simona Nistor și Cezar Oniciuc au participat la manifestarea “*Conference on Harmonic Maps*”, 15-18 mai 2017, Landeda (Brest), France, organizată de Universitatea din Brest, unde D. Fetcu a prezentat expunerea cu titlul “*Constant mean curvature biharmonic surfaces*”, iar S. Nistor expunerea “*Biconservative surfaces in Riemannian manifolds*”.

Cezar Oniciuc a fost main speaker în cadrul “*Geometry Day 2017*”, 10 iunie 2017, Greece, organizată de Universitatea din Patras, cu expunerea “*Biharmonic tori in Euclidean spheres*”.

Ana-Irina Nistor a participat la conferința “*Differential Geometry*”, 18-24 iunie 2017, Banach Conference Center, Bedlewo, Poland, unde a prezentat expunerea “*Periodic magnetic curves on the 3-torus*”.

Articole publicate în reviste cotate ISI

1. E. Loubeau, C. Oniciuc, ***Constant mean curvature proper-biharmonic surfaces of constant Gaussian curvature in spheres***, J. Math. Soc. Japan 68 (2016), 997–1024.
2. S. L. Druță-Romaniuc, J. I. Inoguchi, M. Munteanu, A. I. Nistor, ***Magnetic curves in cosymplectic manifolds***, Rep. Math. Phys. 78 (2016), 33 – 48.
3. S. Nistor, ***Complete biconservative surfaces in R^3 and S^3*** , J. Geom. Phys. 110 (2016), 130 – 153.
4. D. Fetcu, S. Nistor, C. Oniciuc, ***On biconservative surfaces in 3-dimensional space forms***, *Comm. Anal. Geom.* 24 (2016), 1027 – 1045.
5. M. I. Munteanu, A. I. Nistor, ***On some closed magnetic curves on a 3-torus***, Math. Phys. Anal. Geom. 20 (2017) 2, art. 8.

Articol publicat într-o revistă din BDI

1. S. Montaldo, C. Oniciuc, A. Ratto, ***Reduction methods for the bienergy***, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 61 (2016), 261 – 292.

Articole acceptate pentru publicare (ISI)

1. D. Fetcu, E. Loubeau, C. Oniciuc, *Biharmonic tori in spheres*, Differential Geom. Appl., va apărea.
2. J. Inoguchi, M. I. Munteanu, A. I. Nistor, *Magnetic curves in quasi-Sasakian 3-manifolds*, Anal. Math. Phys., va apărea.
3. S. Nistor, *On biconservative surfaces*, Differential Geom. Appl., va apărea.

Articole acceptate pentru publicare (Volum al unei conferințe/BDI)

- S. Nistor, C. Oniciuc, *Global properties of biconservative surfaces in R^3 and S^3* , *Proceedings of The International Workshop on Theory of Submanifolds, Istanbul Technical University, Turkey 2-4 June 2016*, va apărea.

Curs

- D. Fetcu, A. L. Pinheiro, *Subvarietăți biarmonice în varietăți riemanniene*, Casa Editorială Demiurg, Iași, România, 2016, 90 pp. (ISBN 978-973-152-337-8) (în limba română), EDUFBA, Salvador, Brazilia, va apărea (în limba portugheză).

Teză de abilitare

- D. Fetcu, *Submanifolds with Parallel Mean Curvature and Biharmonic Submanifolds in Riemannian Manifolds*, www.researchgate.net, DOI: 10.13140/RG.2.2.29610.11204.

Director de proiect,
prof. dr. Dorel Fetcu



Contract PN-II-RU-TE-2014-4-0004

No. 272/01.10.2015

Constant Mean Curvature and Biharmonic Submanifolds

Principal Investigator: Prof. Dorel Fetcu

Scientific Report 2015-2017

The research activities related to our project started in October 2015, and during the 24 months of the project the team members have been focused on obtaining results that would improve the knowledge in the proposed topics.

The first of these results, concerning the project's objective **O2**. *Study of biharmonic and biconservative submanifolds in certain 3-dimensional spaces*, were proved in our paper

- D. Fetcu, S. Nistor, and C. Oniciuc, *On biconservative surfaces in 3-dimensional space forms*, *Comm. Anal. Geom.* 24 (2016), 1027 – 1045.

Biconservative surfaces, i.e., surfaces for which the tangent part of the bitension field vanishes, that do not have constant mean curvature, in space forms were studied by R. Caddeo, S. Montaldo, C. Oniciuc, and P. Piu, and, in a paper from 2014, they found the explicit equations of such surfaces in \mathbb{R}^3 , S^3 , and H^3 . In the same paper, they also proved that the Gaussian curvature of a biconservative surface satisfies an equation that looks very much like the equation used by G. Ricci-Curbastro, in 1895, to characterize minimal surfaces with negative Gaussian curvature in \mathbb{R}^3 and then by H. B. Lawson, in 1970, to extend this result to constant mean surfaces in space forms. Surfaces satisfying this so called Ricci condition are also called Ricci surfaces and the metric on such a surface is a Ricci metric.

Encouraged by this similitude, we proved that there is a simple way to transform biconservative surfaces in \mathbb{R}^3 , S^3 , and H^3 , in Ricci surfaces. Moreover, in the case of biconservative surfaces in \mathbb{R}^3 we explicitly found the Ricci metric on such a surface.

Whilst the Ricci condition characterizes intrinsically minimal surfaces in 3-dimensional space forms $N^3(c)$, the similar condition found by Caddeo, Montaldo, Oniciuc, and Piu, for biconservative surfaces fail to do the same in their case. In our paper, we also found the intrinsic necessary and sufficient conditions for a Riemannian surface to be locally embedded in $N^3(c)$ as a biconservative surface without constant mean curvature.

These results were presented by C. Oniciuc at the scientific symposium “Al. I. Cuza University's Days” (October 23, 2015) and by S. Nistor at the international conference “Applied and Pure Mathematics (ICAPM 2015)” (November 6-8, 2015), at the Gheorghe Asachi Technical University of Iasi.

In this phase of the project we did not make any mobility and logistic expenses. The initial budget breakdown for the year 2015 was observed.

During the second year of our project the team members continued their research activities within the framework designed by our objectives.

A paper studying topics of the project's objectives **O1. Study of submanifolds with parallel mean curvature vector field in Riemannian manifolds** and **O2. Study of biharmonic and biconservative submanifolds in certain 3-dimensional spaces** is

- E. Loubeau, C. Oniciuc, **Constant mean curvature proper-biharmonic surfaces of constant Gaussian curvature in spheres**, J. Math. Soc. Japan 68 (2016), 997–1024.

In this article constant mean curvature (CMC) surfaces (a more general case than that of parallel mean curvature surfaces) in spheres are investigated under the extra condition of biharmonicity. Using a classification of finite type surfaces in spheres given by Myata, the authors obtain a complete description of such immersions and show that for any given number h between 0 and 1 there exist CMC proper-biharmonic planes and cylinders in the fifth dimensional Euclidean sphere with mean curvature h , and also find a necessary and sufficient condition on h for the existence of CMC proper-biharmonic tori in this sphere. The paper ends with results on flat CMC surfaces in general n -dimensional Euclidean spheres.

We continued, from a new point of view, this study in our work

- D. Fetcu, E. Loubeau, and C. Oniciuc, **Biharmonic tori in spheres**, *Differential Geometry and Its Applications*, to appear,

where it is considered the case of proper-biharmonic tori with constant mean curvature in spheres. We propose a different approach from that in Loubeau and Oniciuc's paper and ask whether a given torus admits a full CMC proper-biharmonic immersion in a Euclidean sphere. We develop a study for two families of tori: rectangular tori with a side of length equal to one and square tori. In the first case we determine the expressions of all such rectangular tori that admit full CMC proper-biharmonic immersions in an n -dimensional unit Euclidean sphere, as well as these immersions. It turns out that the only admissible dimensions for the ambient space are 5 and 7. The case of square tori is more flexible and we prove that there are examples of full CMC proper-biharmonic immersions of such tori in spheres with any odd dimension greater or equal to 5.

Another research direction approached by one of our team members is related to the objective **O6. Study of magnetic curves in product spaces**. The result of this study is the article

- S. L. Druță-Romaniuc, J. I. Inoguchi, M. Munteanu, and A. I. Nistor, **Magnetic curves in cosymplectic manifolds**, Rep. Math. Phys. 78 (2016), 33 – 48.

In this paper are classified magnetic trajectories with respect to contact magnetic fields in

cosymplectic manifolds of arbitrary dimension. It is also obtained a classification of Killing magnetic curves in product spaces $M \times \mathbb{R}$, where M is an arbitrary 2-dimensional Riemannian manifold, and a reduction theorem for magnetic curves in cosymplectic space forms of type $M(k) \times \mathbb{R}$, where $M(k)$ is a complex space form with constant holomorphic sectional curvature k . More precisely, it is shown that such a curve lies in the 3-dimensional space $M(k) \times \mathbb{R}$, this time $M(k)$ being a 2-dimensional complex space form.

Results related to the objective **O5**. *Study of equivariant biharmonic maps* were obtained in the article

- S. Montaldo, C. Oniciuc, and A. Ratto, ***Reduction methods for the bienergy***, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 61 (2016), 261 – 292.

Ideas introduced in a paper from 2013 authored by the first and third author are developed here, in an article that focuses on reduction methods (group actions or, more generally, symmetries) for the bienergy. These techniques prove to be very useful in order to obtain examples of critical points of the bienergy by reducing the study of the relevant fourth order PDE's system to ODE's. In particular, there are studied rotationally symmetric biharmonic conformal diffeomorphisms between models. The reduction method is then applied to study an ample class of G -invariant immersions into the Euclidean space. Unlike in the case of harmonic maps and, in particular, in that of minimal immersions, that inspired this kind of studies, the use of reduction techniques in the study of biharmonicity is not yet very developed, but the examples provided by this paper suggest that they can be of further use in this case too.

One of the PhD Students working in our team, Simona Nistor, brought an important contribution to the fulfillment of the tasks raised by objective **O2**. *Study of biharmonic and biconservative submanifolds in certain 3-dimensional spaces* through the paper

- S. Nistor, ***Complete biconservative surfaces in R^3 and S^3*** , J. Geom. Phys. 110 (2016), 130 – 153.

The paper is concerned with complete biconservative surfaces in 3-dimensional Euclidean space and 3-dimensional unit Euclidean sphere. Biconservative surfaces in 3-dimensional space forms are characterized by the fact that the gradient of their mean curvature function is an eigenvector of the shape operator, and the author studies local and global properties of such surfaces with non-constant mean curvature function. Simply connected complete Riemannian surfaces that admit biconservative immersions in R^3 and S^3 are determined and, moreover, explicitly described.

We continued our work in the last nine months of the project as follows.

Simona Nistor and Cezar Oniciuc elaborated a survey paper on biconservative surfaces, that is related to the second objective of the project.

- S. Nistor, C. Oniciuc, ***Global properties of biconservative surfaces in R^3 and S^3*** , *Proceedings of The International Workshop on Theory of Submanifolds, Istanbul*

Technical University, Turkey 2-4 June 2016, to appear.

This paper presents some recent results on biconservative surfaces in 3-dimensional space forms $N^3(c)$ with a special emphasis on the $c=0$ and $c=1$ cases. One studies the local and global properties of such surfaces, from extrinsic and intrinsic point of view and constructs non-CMC complete biconservative surfaces in the Euclidean space R^3 and in the Euclidean sphere S^3 .

Also related to the **O2.**, Simona Nistor wrote the article,

- ***On biconservative surfaces***, Differential Geometry and Its Applications, to appear,

that is concerned with biconservative surfaces in arbitrary Riemannian manifolds. Biconservative surfaces being characterized by the vanishing of the divergence of a symmetric tensor field S_2 of type $(1,1)$, some of their properties will follow from the general properties of a symmetric divergence-free tensor field of type $(1,1)$. One determines the relation between biconservativity, the property of the shape operator A_H to be a Codazzi tensor field, the holomorphicity of a generalized Hopf function and the quality of the surface to have constant mean curvature. Another important result of this paper is a Simons type formula for biconservative surfaces used to study their geometry.

The problems proposed by the objective **O6.** are addressed in two papers co-authored by the team member Ana-Irina Nistor, as follows.

- M. I. Munteanu, A. I. Nistor, ***On some closed magnetic curves on a 3-torus***, Math. Phys. Anal. Geom. 20 (2017) 2, art. 8,

where two magnetic fields on the 3-torus are considered, obtained from two different contact forms on the Euclidean 3-space. One studies when their corresponding magnetic curves are closed. One finds periodicity conditions involving the set of rational numbers. As the spectrum of closed geodesics on the torus is analogue to the quantization of the energy levels in models of atoms, one calls the obtained condition *the quantization principle*.

- J. Inoguchi, M. I. Munteanu, and A. I. Nistor, ***Magnetic curves in quasi-Sasakian 3-manifolds***, Analysis and Mathematical Physics, to appear.

In this paper one studies magnetic trajectories corresponding to contact magnetic fields in 3-dimensional quasi-Sasakian manifolds. One shows that every contact magnetic curve is a *slant curve*, that is, a curve making constant angle with the trajectories of the characteristic vector field. As it is well known, magnetic trajectories in the Euclidean 3-space are helices. Furthermore, magnetic curves in Sasakian and cosymplectic manifolds of arbitrary dimension are also helices. Remarkably, the magnetic curves in quasi-Sasakian 3-manifolds are not, in general, helices. One presents explicit examples of contact magnetic curves in a quasi-Sasakian space which are not helices. Finally, there is defined a family of linear connections with respect to which the four structure tensor fields are parallel and one calls them the *Okumura type connections*. One gives some reinterpretation of magnetic curves, namely it is proved that they are geodesics for the Okumura type connections.

Steps towards writing a monograph on biharmonic submanifolds in Riemannian manifolds, our project's seventh objective, are represented by the online publication of Dorel Fetcu's Habilitation Thesis (that also contains results related to the third and fourth objective of the project),

- ***Submanifolds with Parallel Mean Curvature and Biharmonic Submanifolds in Riemannian Manifolds***, www.researchgate.net, DOI: 10.13140/RG.2.2.29610.11204,

and also by the publication of a textbook (in Romanian) on this topic, that will also be published (in Portuguese) in Brazil by the publisher of the Federal University of Bahia, EDUFBA

- D. Fetcu, A. L. Pinheiro, ***Biharmonic Submanifolds in Riemannian Manifolds***, Demiurg Publishing House, Iasi, Romania, 2016, 90 pp. (ISBN 978-973-152-337-8)

Mobilities

Between 2 and 4 June 2016, Cezar Oniciuc attended the conference "International Workshop on Theory of Submanifolds" organized in Istanbul, Turkey, by the Istanbul Technical University. As an invited speaker he presented the talk entitled "*Biconservative Surfaces*". He also acted as a chairperson for one of the conference's sessions.

Between 3 and 8 June 2016, Dorel Fetcu attended "The XVIII-th International Conference Geometry, Integrability and Quantization" in Varna, Bulgaria. He presented the plenary talk "*Biharmonic Surfaces with Parallel Mean Curvature in Complex Space Forms*" and also acted as a chairperson for one of the sessions.

Dorel Fetcu, Simona Nistor, and Cezar Oniciuc attended the conference "Differential Geometry and Its Applications" organized in Brno, Czechia, by the Masaryk University between 11 and 15 July 2016. Dorel Fetcu presented the talk "*On Biconservative Surfaces*" and Simona Nistor the poster "*Global Properties of Biconservative Surfaces*".

Invited by Prof. Eric Loubeau, Simona Nistor and Cezar Oniciuc spent one week, between 29 October and 5 November 2016, at the Department of Mathematics of UBO (University of Western Brittany) in Brest, France. There, together with their host, they worked on older common projects (like the Fetcu, Loubeau, Oniciuc paper mentioned above) and have also begun a couple of new ones, related to our project.

Between 1 and 8 April 2017, Simona Nistor and Cezar Oniciuc visited the Department of Mathematics of The University of Cagliari in Italy, invited by Prof. Stefano Montaldo. Beside the usual research activities, Simona Nistor also presented a one-hour talk entitled "*On biconservative submanifolds*".

Another research period was spent by Ana-Irina Nistor at The University of Valenciennes in France, invited by Prof. Luc Vrancken, between 28 March and 4 April 2017. Here she presented the talk "*Contact magnetic curves: classification results*".

Dorel Fetcu, Simona Nistor, and Cezar Oniciuc attended the “*Conference on Harmonic Maps*”, 15-18 May 2017, Landeda (Brest), France, where D. Fetcu presented the talk “Constant mean curvature biharmonic surfaces” and S. Nistor the talk “*Biconservative surfaces in Riemannian manifolds*”.

Cezar Oniciuc was a main speaker at the “*Geometry Day 2017*”, University of Patras, 10 June 2017, Greece, where he presented the talk “*Biharmonic tori in Euclidean spheres*”.

Ana-Irina Nistor attended the conference “*Differential Geometry*”, 18-24 June 2017, Banach Conference Center, Bedlewo, Poland, and presented the talk “*Periodic magnetic curves on the 3-torus*”.

ISI published papers

- E. Loubeau, C. Oniciuc, *Constant mean curvature proper-biharmonic surfaces of constant Gaussian curvature in spheres*, J. Math. Soc. Japan 68 (2016), 997–1024.
- S. L. Druță-Romaniuc, J. I. Inoguchi, M. Munteanu, and A. I. Nistor, *Magnetic curves in cosymplectic manifolds*, Rep. Math. Phys. 78 (2016), 33 – 48.
- S. Nistor, *Complete biconservative surfaces in R^3 and S^3* , J. Geom. Phys. 110 (2016), 130 – 153.
- D. Fetcu, S. Nistor, and C. Oniciuc, *On biconservative surfaces in 3-dimensional space forms*, *Comm. Anal. Geom.* 24 (2016), 1027 – 1045.
- M. I. Munteanu, A. I. Nistor, *On some closed magnetic curves on a 3-torus*, *Math. Phys. Anal. Geom.* 20 (2017) 2, art. 8.

BDI published papers

- S. Montaldo, C. Oniciuc, and A. Ratto, *Reduction methods for the bienergy*, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* 61 (2016), 261 – 292.

Accepted papers (ISI)

- D. Fetcu, E. Loubeau, and C. Oniciuc, *Biharmonic tori in spheres*, *Differential Geom. Appl.*, to appear.
- J. Inoguchi, M. I. Munteanu, and A. I. Nistor, *Magnetic curves in quasi-Sasakian 3-manifolds*, *Analysis and Mathematical Physics*, to appear.
- S. Nistor, *On biconservative surfaces*, *Differential Geom. Appl.*, to appear.

Accepted paper (Proceedings/BDI)

- S. Nistor, C. Oniciuc, *Global properties of biconservative surfaces in R^3 and S^3* , *Proceedings of The International Workshop on Theory of Submanifolds, Istanbul Technical University, Turkey 2-4 June 2016*, to appear.

Textbook

- D. Fetcu, A. L. Pinheiro, *Biharmonic Submanifolds in Riemannian Manifolds*, Demiurg Publishing House, Iasi, Romania, 2016, 90 pp. (ISBN 978-973-152-337-8) (in Romanian), EDUFBA, Salvador, Brazil, to appear (in Portuguese).

Habilitation Thesis

- D. Fetcu, *Submanifolds with Parallel Mean Curvature and Biharmonic Submanifolds in Riemannian Manifolds*, www.researchgate.net, DOI: 10.13140/RG.2.2.29610.11204.

Principal Investigator,

Prof. Dorel Fetcu

