**Simularea repartiţiilor continue**

Dorim să ilustrăm utilitatea simulării pe calculator a experimentelor a căror rezultate pot lua orice valoare într-un interval dat (în general au o infinitate nenumărabilă de rezultate posibile).

Exemplele prezentate raportează probabilitatea de apariţie a unui anumit rezultat, dedusă teoretic, cu valoarea estimată conform definiţiei frecvenţiale a probabilităţii (când evenimentele elementare sunt egal probabile).

**Exemplul 1:**

Se consideră un cerc de raza dată şi un ac rotitor; apoi se consideră un arc de lungime *p* şi spunem că un eveniment are loc, dacă acul se opreşte pe arcul desemnat. În acest caz rezultatul experimentului poate fi privit ca fixarea unui punct de pe circumferinţa, dintr-un număr infinit de puncte. Un eveniment este, astfel, o submulţime din mulţimea punctelor circumferinţei. A spune că acul rotitor îşi găseşte diferitele poziţii pe cerc cu egală probabilitate este acelaşi lucru cu a spune că el este echiprobabil plasat în arce de lungime egală. Dacă se consideră lungimea circumferinţei cercului egală cu 1, aceasta sugerează că probabilitatea ca vârful acului să se afle într-un anume arc este egală cu lungimea arcului respectiv.

Se poate verifica ipoteza de mai sus prin simulare: se ia un cerc de lungime 1 şi se divide în 10 subarce egale, de lungime 1/10. Se va observa ca fiecare punct de pe circumferinţă poate fi descris prin distanţa, pe circumferinţă, de la un punct fix P, în sensul arcelor de ceasornic, până la punctul considerat.

Astfel se alege un număr aleator între 0 şi 1, pentru a desemna poziţia unui punct oarecare de pe circumferinţă. Se pot alege astfel un număr suficient de mare de puncte şi să se observe ce fracţiune din acestea se găseşte în fiecare din cele 10 arce:

```
% Program ce demonstrează proporţia cu care se produce oprirea
%acului rotitor într-un arc de lungime desemnată. Simularea înlocuieşte
%problema continuă printr-o aproximare discretă
 xmin=0;
 xmax=1;
 încercari=input(' Număr încercări : ');
 nr_celule=input(' Număr de celule : ');
 contor_celule=zeros(1,nr_celule);
 dx=(xmax-xmin)/nr_celule;
for n=1:încercări
        x=rand;
        celula=fix((x-xmin)/dx)+1  ;
        contor_celule(celula)=contor_celule(celula)+1;
end
%probabilitatea de plasare a acului într-un arc de lungime dată
 contor_celule=(1/incercari)*contor_celule
```

Dacă se repetă experimentul pentru un număr sporit de încercări şi pentru diferite partajări ale circumferinţei cercului, se observă că, de fiecare dată, probabilitatea de oprire a acului rotitor într-un arc dat este aproximativ egală cu lungimea arcului.

**Exemplul 2:**

În următorul exemplu vom arăta cum poate fi folosită simularea pentru a estima suprafaţa figurilor plane. Se alege, la întâmplare o pereche de valori, fiecare dintre ele fiind uniform distribuite în intervalul [0,1) (punctele pot fi considerate drept coordonatele unui punct ales la întâmplare în pătratul de latura 1). Experienţa exemplului anterior ne spune că punctul se plasează echiprobabil în suprafeţe de arie egală (suprafeţele constituind submulţimi ale pătratului dat).

Deoarece suprafaţa pătratului este 1, probabilitatea ca punctul să se găsească pe suprafaţa E ar trebui să fie egală chiar cu suprafaţa E.
Putem in acest fel să estimăm suprafaţa oricărei porţiuni din pătrat, estimând probabilitatea ca punctul ales la întâmplare să se găsească în porţiunea delimitată de acea suprafaţă. Putem folosi această metodă pentru a estima, de exemplu aria suprafeţei E de sub curba $y = x^2$ din pătratul unitar. Vom alege un număr mare de puncte $(x, y)$ şi vom înregistra ce fracţiune se găseşte în regiunea: E={ $(x, y)$ ; $y <= x^2$ }.

Metoda de simulare folosită se numeşte **Monte-Carlo**; ea determină obţinerea estimaţiilor diferitelor caracteristici numerice pe cale experimentală.

```
%Experiment Monte_Carlo de estimare a suprafeţei
 nr_incercari=input(' Număr încercări : ');
 c=0;
 for n=1:nr_incercari
        x=rand;
        y=rand;
        if y<=x^2
            c=c+1;
        end;
 end;
 disp(' Estimarea ariei = ');
 disp(c/nr_incercari);
```

Rularea acestui program pentru un număr mare de încercări (de exemplu 10000) va produce o valoare estimată a ariei de 0.332. Dacă evaluam teoretic suprafaţa exactă este: $Aria = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$.

Procedurile de tip Monte-Carlo sunt frecvent utilizate în aplicaţiile inginereşti pentru care metodele analitice se dovedesc a fi dificil de aplicat.

**Exemplul 3: Acul lui Buffon**

Acest exemplu se bazează pe un experiment celebru, dar nu unic, de estimare a constantei *pi* folosind simulările probabilistice. Presupunem o suprafaţă plană, pe care vom trasa linii orizontale, paralele, la distanţa unitară. Daca aruncăm un ac de lungime 1, aleator, pe această suprafaţă, putem observa de câte ori acul intersectează una din linii.

Fie: $d$ = distanţa de la centrul acului la cea mai apropiată linie;
*theta* = unghiul ascuţit între ac şi cea mai apropiată linie;
cu 0<= $d$ <=1/2 şi 0<= *theta* <= *pi*/2

Acul intersectează cea mai apropiată linie, dacă distanţa de la centrul sau la linia intersectată este:
$d$ <= 1/2, adică $d/\sin(theta) \le 1/2$.

Vom presupune, în continuare, că atunci când aruncăm acul, perechea (*theta*, $d$) este aleasă la întâmplare , în dreptunghiul:
0<= *theta* <= *pi*/2, 0<= $d$ <=1/2.

Probabilitatea producerii evenimentului $E$ (intersectarea acului cu o linie) este $P(E)$={$d$<=1/2*sin*(*theta*)} şi reprezintă o fracţiune din suprafaţa dreptunghiului, în interiorul căruia putem delimita suprafaţa $E$:
- suprafaţa dreptunghiului: $S = pi/2 \cdot 1/2 = pi/4$
- suprafaţa E: $S(E) = \int_0^{pi/2} \frac{1}{2} \cdot \sin(theta)\, dtheta = \frac{1}{2}$

Probabilitatea: $P(E) = \frac{S(E)}{S} = (1/2)/(pi/4) = \frac{2}{pi}$.

În continuare se prezintă programul de simulare a experimentului Buffon în vederea estimării numărului *pi* (*pi*=2/*P*(*E*)). Ulterior se va arăta că pentru acest gen de estimare eroarea nu va fi mai mare ca 5/*sqrt*(*n*), unde *n* reprezintă numărul de aruncări ale acului:

```
% Experimentul:"Acul lui Buffon" folosit pentru estimarea constantei pi
 nr_incercari=input(' Număr încercări : ');  c=0;
 for n=1:nr_incercari
            d=(1/2)*rand;
            theta=(pi/2)*rand;
        if d<=((1/2)*sin(theta))
          c=c+1;
        end;
 end;
 disp(' Estimarea lui pi =');
 disp(2*nr_incercari/c);
```

**Probleme propuse**

1. Modificaţi problema acului rotitor împărţind circumferinţa cercului în 3 arce de lungime 1/2, 1/3, 1/6.
2. Simulaţi pe calculator un experiment de tip Monte-Carlo ce estimează suprafaţa cercului înscris în pătratul unitar.
3. Modificaţi programul Monte-Carlo pentru a estima :
 a) suprafaţa cuprinsă între axa *x*, $x \in [0,1]$ şi curba $y = sin(pi*x)$, $y \in [0,1]$. Cum poate fi folosită valoarea obţinută la punctul a) pentru a estima valoarea lui *pi*?
 b) analog pentru curba $y = 1/(x+1)$. Cum poate fi folosită valoarea obţinută la punctul b) pentru a estima ln(2)?
4. P.S.Laplace (Theorie Analytique de Probabilite - Paris, 1812) a reconsiderat problema acului lui Buffon, considerând o reţea plană echidistantă (la distanţa unitară). El a arătat că probabilitatea ca un ac de lungime L<1 să traverseze măcar o linie este:
   $$p = (4 \cdot L - L^2)/pi\,.$$
   Iniţiaţi un experiment probabilistic de estimare a constantei pi.

**Indicaţii:**

1. Se vor alege 3 variabile aleatoare:
   *theta* aparţine intervalului [0, *pi*/2];
   *d1* aparţine intervalului [0, *L*/2];
   *d2* aparţine intervalului [0, *L*/2],
   unde *d1*, *d2* reprezintă distanţa de la centrul acului la cea mai apropiată linie verticală sau orizontală
2. Acul intersectează o linie dacă:
   $$d1 \le L/2 \cdot sin(theta) \text{ sau } d2 \le L/2 \cdot cos(theta).$$

Valoarea estimată a lui *p* este: $p = (4 \cdot L - L^2)/a$, unde a este frecvenţa relativă cu care acul traversează măcar o linie (se va considera $L = 1$).