

Automatică și Calculatoare, Statistică și Prelucrarea Datelor
SEMINAR 2, semestrul II, 2016–2017

1 Probabilități. Probabilități condiționate

Problema 1.1 *Experiența constă în a alege la întâmplare un element din mulțimea $A = \{a, b\}$ și un element din mulțimea $B = \{a, b, c\}$. a) Să se scrie elementele mulțimii $A \times B$. b) Care este probabilitatea ca elementele alese să fie identice?*

Problema 1.2 *O urnă conține 40 de bile din care 10 albe, 25 negre și 5 roșii. Din această urnă se extrag trei bile. Să se determine probabilitatea ca bilele extrase să fie de culori diferite.*

Problema 1.3 *Numerele $1, 2, \dots, n$ se așează la întâmplare. a) Care este probabilitatea ca numerele $1, 2$ să fie așezate în ordine crescătoare și consecutiv? b) Care este probabilitatea ca numerele $k, k + 1, k + 2$ să fie așezate în ordine crescătoare și consecutiv?*

Problema 1.4 *Într-o cursă sunt zece concurenți: $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$.*

a) *Se alege succesiv 3 concurenți. Care este probabilitatea p_1 ca acești concurenți să fie clasati, la sfârșitul concursului, pe primele trei locuri, în aceeași ordine cu cea a alegerii?*

b) *Care este probabilitatea p_2 ca acei trei concurenți aleși să ocupe primele trei locuri, fără a se ține seama de ordinea sosirii?*

c) *Se alege 4 concurenți. Care este probabilitatea ca între acești patru concurenți să figureze cei trei castigatori?*

Problema 1.5 *n bile se repartizează la întâmplare în trei urne U_1, U_2 și U_3 . Să se calculeze probabilitatea următoarelor evenimente în cazul $n = 5$ și apoi în cazul general:*

E_1 : Urna U_1 este goală E_5 : Nici o urnă nu este goală

E_2 : Numai urna U_1 este goală E_6 : Două urne sunt goale

E_3 : Numai o urnă este goală E_7 : Trei urne sunt goale

E_4 : Cel puțin o urnă este goală E_8 : U_1 sau U_2 sunt goale.

Problema 1.6 *Dintr-un joc de n cărți se extrag, una după alta, p cărți și se așează una lângă alta, în ordinea extragerilor.*

a) *Să se calculeze numărul extragerilor posibile.*

b) *Pentru $n = 32$ și $p = 4$ să se calculeze probabilitatea ca a doua carte extrasă, și numai aceasta, să fie un as.*

Problema 1.7 *Coeficienții a, b, c ai ecuației $ax^2 + bx + c = 0$ sunt determinați de rezultatele obținute în urma aruncării a trei zaruri. Sa se calculeze probabilitatea evenimentului:*

a) *ecuația admite două rădăcini reale;*

b) *ecuația admite două rădăcini complexe;*

c) *numarul -1 este rădăcină a ecuației.*

Problema 1.8 n persoane sunt adunate în aceeași sală. Să se calculeze probabilitatea ca:

- a) să nu existe două persoane având aceeași zi de naștere;
- b) cel puțin două persoane să aibă aceeași zi de naștere;
- c) două persoane și numai două să aibă aceeași zi de naștere.

Problema 1.9 Într-o cameră întunecoasă există 5 perechi de pantofi de același fel. Alegem la întâmplare 5 pantofi. Care este probabilitatea ca între cei cinci pantofi să fie cel puțin o pereche?

Problema 1.10 Un călător își cumpără două cutii de chibrituri și le introduce în buzunar. După aceea, de fiecare dată când folosește un chibrit, îl scoate la întâmplare dintr-o cutie. După un timp, constată că o cutie este goală. Care este probabilitatea ca în a doua cutie să fie în acel moment k chibrituri, dacă la început ambele cutii aveau n chibrituri?

Problema 1.11 Din primii 100 de întregi $1, 2, 3, \dots, 100$ se alege la întâmplare unul. Care este probabilitatea ca el să fie divizibil cu 2, 5 sau 11?

Problema 1.12 Dacă n scrisori plecate sunt plasate la întâmplare în n plicuri, care este probabilitatea ca măcar o scrisoare să fie plasată în plicul corespunzător?

Problema 1.13 Zece bile se repartizează la întâmplare în patru urne. Care este probabilitatea ca măcar o urnă să fie goală?

Problema 1.14 O societate compusă din n perechi soț-soție dansează. Se presupune că formarea perechilor la dans este egal probabilă. Care este probabilitatea ca, la un moment dat, fiecare bărbat să nu danseze cu soția sa?

Problema 1.15 O urnă conține 12 bile numerotate de la 1 la 12. Să se determine probabilitatea ca bilele numerotate 5, 7, 11 să fie extrase la extragerile 5, 7, 11. (bilele nu se pun înapoi)

Problema 1.16 Testele folosite în detectarea unei boli dau rezultate în 95% din cazuri și indică greșit în 5% din cazuri. La persoanele sănatoase, testele indică în 1% din cazuri prezența bolii și în 99% din cazuri absența ei. Dacă dintr-o populație în care 0.2% din persoane au boala se alege o persoană pe care testul o indică bolnavă, care este probabilitatea ca această persoană să prezinte într-adevăr boala respectivă?

Problema 1.17 20%, 30%, 50% din anvelopele unei uzine sunt realizate de agregatele 1, 2, 3. Proporția de anvelope defecte date de agregate este 5%, 3%, 1%.

- i) Ce proporție din totalul anvelopelor realizate este defectă?
- ii) Dacă se alege din întreaga producție de anvelope una, și se găsește că este defectă, care este probabilitatea ca ea să fi fost produsă de agregatul 3?

Problema 1.18 Există exact trei firme care produc un aparat, firmele F_1, F_2, F_3 și acestea realizează respectiv 30, 25 și 45 la sută din producția țării. La firma F_1 1% din producție este rebut, la F_2 1.5% iar la F_3 2%. Care este probabilitatea ca un aparat luat la întâmplare de la cele trei firme să fie rebut? Dar care este probabilitatea ca el să provină de la firma F_3 ?

Problema 1.19 Doi jucători A și B joacă un joc de 32 de cărți. Nicio carte extrasă din pachet nu este reintrodusă în acesta. Jucătorul A trage două cărți și câștigă dacă trage două "figuri" (adică J, Q, K sau A). Dacă A nu câștigă, jucătorul B trage o carte, și câștigă dacă trage o "figură". Care dintre cei doi jucători are cea mai mare șansă de a câștiga? Care este probabilitatea ca niciunul dintre cei doi jucători să nu câștige?

Problema 1.20 Se scot la vânzare 50 de bilete de loterie, dintre care unul singur este câștigător. Fiecare cumpărător poate alege doar dintre biletele care nu au fost încă vândute. Care jucător preferați să fiți? Primul? Al doilea? Al treilea?

Problema 1.21 O urnă conține 10 bile albe și 20 de bile roșii. Se scot succesiv n bile, reintroducând bila în urnă dacă este albă și nereintroducând-o dacă este roșie. Care este probabilitatea de a extrage din urnă exact o bilă roșie?

Problema 1.22 Dintre cei 23 de membri ai unei asociații, din care 12 bărbați și 11 femei, se alege un consiliu format dintr-un președinte, un vicepreședinte, un trezorier și o secretară. În câte feluri se poate forma acest consiliu? În câte feluri se poate forma consiliul astfel ca acesta să aibă în componență 2 bărbați și două femei? În câte feluri se poate forma consiliul astfel ca președintele și vicepreședintele să fie de sexe diferite? Câte dintre consiliile de la întrebarea precedentă verifică faptul că Doamna X și Domnul Y să nu facă parte în același timp din consiliu?

Problema 1.23 Doi jucători lansează succesiv un ban trucat, care are proprietatea că stema apare după o aruncare cu probabilitatea p . Primul jucător numit A începe. Jucătorul A câștigă dacă obține stema, caz în care jocul se oprește. Jucătorul B câștigă dacă obține valoarea, caz în care jocul se oprește.

1. Care este probabilitatea ca A să câștige exact la a n -a aruncare?
2. Care este probabilitatea ca A să câștige?
3. Care este probabilitatea ca jocul să nu se oprească?
4. Ce valoare ar trebui să aibă p astfel încât cei doi jucători să aibă aceleași șanse de câștig?

Problema 1.24 Două persoane A și B au decis să se întâlnească între orele 0 și 1 într-un anumit loc, venind independent. În plus ele au făcut convenția ca primul venit să-l aștepte pe celălalt 15 minute (sfertul academic) și dacă acesta nu vine, să plece. Care este probabilitatea ca persoanele respective să se întâlnească?

Problema 1.25 Dacă se amestecă un pachet de cărți, care este probabilitatea ca toți cei patru ași să apară unul după altul ?

Problema 1.26 Vrem să calculăm probabilitatea de a câștiga la LOTO 6/49. Știm că se cumpără un bilet pe care se trec 6 numere distincte între 1 și 49. Dacă aceste numere coincid cu cele extrase la loterie, atunci biletul este câștigător.

Problema 1.27 Se joacă un joc. Partida este considerată câștigată de primul dintre cei doi jucători care câștigă trei jocuri. Dacă jocul se întrerupe la scorul de $2 - 1$, cum trebuie împărțită miza?

Problema 1.28 (Problema concordanțelor) Un student are de răspuns la n întrebări, cărora trebuie să le asocieze răspunsul corect dintre n răspunsuri indicate. Stabiliți probabilitatea ca studentul să răspundă la: a) prima întrebare; b) primele două întrebări; c) cel puțin o întrebare.

Problema 1.29 Se scot la vânzare 50 de bilete de loterie, dintre care unul singur este câștigător. Fiecare cumpărător poate alege doar dintre biletele care nu au fost încă vândute. Care jucător preferați să fiți? Primul? Al doilea? Al treilea?

Problema 1.30 O urnă conține 10 bile albe și 20 de bile roșii. Se scot succesiv n bile, reintroducând bila în urnă dacă este albă și nereintroducând-o dacă este roșie. Care este probabilitatea de a extrage din urnă exact o bilă roșie?

Problema 1.31 Dintre cei 23 de membri ai unei asociații, din care 12 bărbați și 11 femei, se alege un consiliu format dintr-un președinte, un vicepreședinte, un trezorier și o secretară. În câte feluri se poate forma acest consiliu? În câte feluri se poate forma consiliul astfel ca acesta să aibă în componență 2 bărbați și două femei? În câte feluri se poate forma consiliul astfel ca președintele și vicepreședintele să fie de sexe diferite? Câte dintre consiliile de la întrebarea precedentă verifică faptul că Doamna X și Domnul Y să nu facă parte în același timp din consiliu?

Problema 1.32 Doi jucători lansează succesiv un ban trucat, care are proprietatea că stema apare după o aruncare cu probabilitatea p . Primul jucător numit A începe. Jucătorul A câștigă dacă obține stema, caz în care jocul se oprește. Jucătorul B câștigă dacă obține valoarea, caz în care jocul se oprește.

1. Care este probabilitatea ca A să câștige exact la a n -a aruncare?
2. Care este probabilitatea ca A să câștige?
3. Care este probabilitatea ca jocul să nu se oprească?
4. Ce valoare ar trebui să aibă p astfel încât cei doi jucători să aibă aceleași șanse de câștig?

Problema 1.33 Dacă se amestecă un pachet de cărți, care este probabilitatea ca toți cei patru ași să apară unul după altul ?

Problema 1.34 Un asamblor de calculatoare folosește circuite din trei surse: A , B și C . Ele pot fi defecte cu probabilitățile de respectiv 0,001, 0,005 și 0,01. Dacă se ia un circuit la întâmplare și se constată că este defect, care este probabilitatea ca el să provină de la sursa A sau B ?