Automatică şi Calculatoare, Statistică şi Prelucrarea Datelor
SEMINAR 3, semestrul II, 2016–2017

1 Variabile aleatoare discrete

Problema 1.1 *Legea de repartiţie a unei variabile aleatoare discrete X este:*

$$\begin{array}{llllll} x_i & -4 & -2 & 1 & 2 & 3 \\ P(X = x_i) & 0.1 & 0.35 & 0.35 & 0.25 & 0.15 \end{array}.$$

a) Reprezentaţi grafic funcţia de repartiţie.

b) Calculaţi $P(X < 0)$, $P(X > -1)$, $P(-3.5 < X < -2)$, $P(-3.5 < X < -2)$.

c) Daţi legile de repartiţie pentru variabilele aleatoare: $|X|$, X^2+X+2, $\inf(X, 1)$, $\sup(X, -X^2)$. Pentru fiecare din variabilele aleatoare de mai sus, calculaţi mediana, cuantila inferioară şi superioară şi modulul.

Problema 1.2 *Pentru fiecare dintre variabilele aleatoare descrise mai jos, daţi legea de repartiţie:*

1. numărul de fete dintr-o familie de 6 copii, ştiind că probabilitatea naşterii unei fete este 0.51.

2. numărul anual de accidente dintr-o intersecţie, ştiind că în fiecare zi şansa de accident este de 1/125.

3. într-un grup de 20 de persoane, dintre care 5 femei, numărul femeilor dintr-o delegaţie de 6 persoane.

4. de câte ori trebuie lansat un zar pentru a obţine de două ori 6.

5. numărul de persoane prezentând o boală dată la o consultaţie.

6. numărul de raspunsuri DA sau NU la o întrebare a unui sondaj.

Pentru fiecare din variabilele aleatoare de mai sus, daţi functia de repartiţie şi calculaţi mediana, cuantila inferioară şi superioară şi modulul.

Problema 1.3 *Fie X o variabilă aleatoare discretă cu valorile $\{1, 2, ..., n\}$ astfel ca $P(X = k) = ak + b$ pentru orice $k \in \{1, 2, ..., n\}$, unde a şi b sunt parametri reali. Să se gasească a şi b astfel ca X să fie simetrică.*

Problema 1.4 *Într-un sac se găsesc 128 de bile numerotate de la 1 la 128. Se extrag 10 bile din sac, iar după aceea se mai alege o bilă dintre cele 10. Notam cu X numărul bilei obţinute. Care este legea de repartiţie a lui X?*

Problema 1.5 *Fie $\theta \in [0, 0.5)$ şi X o variabilă aleatoare discretă cu valori în $\{0, 1, 2, 3\}$ a cărei lege de repartiţie este dată de $P(X = 0) = P(X = 3) = \theta$ şi $P(X = 1) = P(X = 2) = 0.5 - \theta$. Se mai consideră şi variabilele aleatoare $Y = X(X-1)(X-2)(X-3)$ şi $Z = \dfrac{X(X-1)(X-2)}{6}$. Pentru X, Y şi Z să se exprime funcţiile de repartiţie şi sa se calculeze mediana, cuantila inferioară şi superioară şi modulul.*

Problema 1.6 *N urne conţin fiecare n jetoane numerotate de la 1 la n. Se extrage la întamplare un jeton din fiecare urnă, şi se notează cu X cel mai mare numar extras. Determinaţi functia de repartiţie a variabilei aleatoare discrete X, mediana, cuantila inferioară şi superioară şi modulul.*

Problema 1.7 *Fie două constante a şi b şi variabila aleatoare X despre care presupunem că este simetrică faţă de c. Să se arate ca variabila $aX + b$ este simetrică faţă de $ac + b$. Dacă valorile lui X aranjate în ordine sunt $a_i 1 < a_2 < ... < a_n$ atunci arătaţi că $c = \dfrac{a_1 + a_n}{2}$.*

Problema 1.8 *Un zar perfect echilibrat A are înscris numărul 1 pe patru feţe şi -2 pe celelalte două. Un zar neechilibrat B are inscrise pe cele şase feţe numerele $-2, -1, 0, 1, 2, 3$. Probabilităţile de apariţie a feţelor zarului B formează, în ordinea indicată, o progresie geometrică de raţie $1/2$. Să se scrie legile de repartiţie pentru A şi B. Se lanseaza cele două zaruri. Se notează cu X variabila aleatoare discretă egală cu suma numerelor apărute pe cele două zaruri. Să se scrie legea de repartiţie pentru X.*

Problema 1.9 *În fiecare zi, un bătrân nebun vrea sa îsi asasineze pisica, spărgând un pahar. Probabilitatea ca pisica să zgârie într-o zi este de 0.2. De fiecare dată când zgârie, există o probabilitate de $1/100$ ca bătrânul să facă un infarct. Fie X numărul paharelor sparte în 100 de zile, Y numărul ce indică de câte ori a zgâriat pisica în 100 de zile şi Z de câte ori a făcut bătrânul infarct în 2 zile. Să se scrie legile de repartiţie pentru X, Y, Z şi să se determine funcţiile de repartiţie în fiecare caz, precum şi mediana, cuantila inferioară şi superioară şi modulul variabilei aleatoare.*

Problema 1.10 *Fie X_1 şi X_2 două variabile aleatoare independente cu repartitiile date de $P(X_i = k) = pq^k$ pentru $k \in \mathbb{N}$ şi $i = 1, 2$. Să se afle repartiţia variabilei aleatoare $Y = \max(X_1, X_2)$. Să se afle repartiţia comună a variabilelor Y şi X_1.*

Problema 1.11 *Daca n bile sunt repartizate la întâmplare în m urne, fie X numărul de bile din prima urnă şi Y numărul de bile din primele două urne. Calculaţi repartiţia variabilei X condiţionata de valorile variabilei Y.*

Problema 1.12 *O monedă este aruncată până se obţine fata cu stema. Fie X numărul de aruncări necesare pentru realizarea acestui eveniment. Să se arate că $M[X] = 2$.*

Problema 1.13 *Sa se calculeze dispersia pentru următoarele repartiţii:*

$$X : \begin{pmatrix} 897 & 898 & 900 & 903 \\ 0.2 & 0.4 & 0.3 & 0.1 \end{pmatrix} \qquad X : \begin{pmatrix} 0.015 & 0.045 & 0.75 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix}$$
$$X : \begin{pmatrix} 5.2 & 5.3 & 5.8 & 6 \\ 0.4 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix} \qquad X : \begin{pmatrix} 100 & 150 & 200 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

Problema 1.14 *Dacă X şi Y sunt variabile aleatoare independente şi identic repartizate cu repartiţia*

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

să se determine repartiţia variabilei aleatoare $X + Y$ precum şi dispersia acesteia.

Problema 1.15 *Se consideră două evenimente A şi B pentru care $P(A) = 4$, $P(B \setminus A) = 2$, $P(A \setminus B) = 4$ şi variabilele aleatoare X şi Y definite astfel:*

$$X = \begin{cases} 1 & \text{dacă se realizează } A \\ 0 & \text{dacă se realizează } \overline{A} \end{cases} \qquad Z = \begin{cases} 1 & \text{dacă se realizează } B \\ 0 & \text{dacă se realizează } \overline{B} \end{cases}$$

Să se arate că $\rho(X, Y) = 0$.

Problema 1.16 *Se aruncă două monede, fiecare dintre ele având imprimat pe o faţă numărul 1 şi pe cealaltă faţă numărul 2. Se considera variabila aleatoare X "suma numerelor obtinute" şi variabila aleatoare Y "maximul dintre aceste numere". Să se arate ca $\rho(X, Y) = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$.*

Problema 1.17 *Se aruncă două zaruri şi se noteaza cu X, respectiv Y, suma punctelor de pe cele două zaruri, respectiv numărul maxim de puncte (dacă numerele sunt egale, se ia valoarea comună). Să se calculeze $\rho(X, Y)$.*

Problema 1.18 *Se consideră o urnă ce conţine 5 bile numerotate de la 1 la 5. Se scot simultan trei bile din urnă. Se notează cu X cel mai mic număr obţinut. Daţi legea de repartiţie a variabilei aleatoare X. Calculaţi valoarea medie $M[X]$ şi abaterea medie patratică $\sigma[X]$. Notăm cu Y cel mai mare număr obţinut. Sunt variabilele aleatoare X şi Y independente? Să se calculeze coeficientul de corelaţie $\rho(X, Y)$.*

Problema 1.19 *Se lanseaza o monedă perfect echilibrată, se notează cu X_1 rezultatul obţinut: $X_1 = 0$ dacă se obţine stema şi $X_1 = 1$ dacă se obţine valoarea. Dacă $X_1 = 0$ se lansează o monedă trucată pentru care probabilitatea de a obţine valoarea este 2/3. Dacă $X_1 = 1$ atunci se lansează din nou moneda echilibrată. Se noteaza cu X_2 "rezultatul celei de-a doua aruncări ($X_2 = 0$ dacă se obţine stema şi $X_2 = 1$ dacă se obţine valoarea). Fie $X = X_2$ şi $Y = X_1 + X_2$.*

a) Daţi legea de repartiţie pentru X_2.

b) Aflaţi repartiţia comună a variabilelor X şi Y.

c) Calculaţi legea lui Y condiţionat de X.

d) Calculaţi $M[X]$, $M[Y]$, $\sigma[X]$, $\sigma[Y]$, $\operatorname{cov}(X, Y)$, $\rho(X, Y)$.

Problema 1.20 *Un sac conţine n jetoane numerotate de la 1 la n. Se extrag succesiv 2 jetoane din sac. Fie X numărul primului jeton şi Y numărul celui de-al doilea jeton extras. Determinati $\operatorname{cov}(X, Y)$.*

Problema 1.21 *Se lanseaza un zar de N ori şi se notează cu Z "de câte ori s-a obtinut cifra 6". Se lanseaza de Z ori o monedă trucată (cu probabilitatea p de a se obţine stema). Se noteaza cu X "numărul de steme obţinute" şi cu Y "numărul de valori obtinute". Se cer:*

a) repartiţia, valoarea medie şi dispersia lui Z.

b) $P(X = k \mid Z = n)$ şi $P((X = k) \cap (Z = n))$ pentru $k, n \in \mathbb{N}$.

c) repartiţia, valoarea medie şi dispersia pentru X şi Y (indicaţie: $C_n^k C_N^n = C_N^k C_{N-k}^{n-k}$).

d) $\operatorname{cov}(X, Y)$ şi $\rho(X, Y)$.