

Automatică și Calculatoare, Statistică și Prelucrarea Datelor
SEMINAR 6, semestrul II, 2016–2017

1 Elemente de statistică

1.1 Metoda verosimilității maxime

Problema 1.1 Fie X o variabilă aleatoare cu densitatea de probabilitate

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} x^{\frac{1-\theta}{\theta}}, & 0 < x \leq 1, \theta > 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Se face o selecție x_1, x_2, \dots, x_n . Să se determine estimatorul de verosimilitate maximă pentru parametrul θ al repartiției.

Problema 1.2 Fie X o variabilă aleatoare cu densitatea de probabilitate

$$f(x) = \begin{cases} (1 + \lambda)x^\lambda, & 0 \leq x \leq 1, \lambda > 0 \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$$

Se face o selecție x_1, x_2, \dots, x_n . Să se determine estimatorul de verosimilitate maximă pentru parametrul λ al repartiției.

Problema 1.3 Fie x_1, x_2, \dots, x_n ($n \geq 2$) o selecție de valori ale variabilelor X_1, X_2, \dots, X_n care au o distribuție normală, i. i. r. cu v. a. $X \in N(m, \sigma^2)$. Determinați, prin metoda verosimilității maxime:

- (i) Media m , dacă dispersia σ^2 este cunoscută;
- (ii) Dispersia σ^2 , dacă media m este necunoscută;
- (iii) Media m și dispersia σ^2 (ambele necunoscute).

Problema 1.4 Presupunem că timpul de viață a unui aparat este distribuit $\text{Exp}[\theta]$ unde $\theta \in (0, \infty)$ este necunoscut. Determinați $\hat{\theta}$, estimatorul de verosimilitate maximă.

2 Intervale de încredere. Testarea ipotezelor statistice. Testul lui Pearson

Problema 2.1 Biroul de Meteorologie al guvernului australian a comunicat media cantității de ploaie în litri pe metru pătrat în anii 2001-2009:

500.3 505.2 418.7 393.2 424.8 476.5 469.9 422.6 499.2

(i) Să se estimeze cu estimatorul de verosimilitate maximă media și dispersia, știind că această caracteristică urmează o distribuție normală.

(ii) Să se construiască un interval de încredere cu nivel de încredere 98% pentru media și dispersia cantității de ploaie.

(iii) Să se testeze normalitatea datelor folosind testul χ^2 .

Problema 2.2 Măsurători făcute asupra rezistenței unor piese au condus la următoarele rezultate:

0.140 0.138 0.143 0.142 0.138 0.136 0.141

Să se calculeze media și dispersia de selecție. Calculați un interval de încredere pentru media rezistenței cu $\alpha = 0.05$, știind că datele urmează o repartiție normală.

Problema 2.3 Timpul de așteptare la check-in într-un aeroport se știe că urmează o distribuție normală. Un eșantion de 10 pasageri a fost interogat, aceștia spunând că au așteptat, în minute, următorul timp:

15, 21, 12, 18, 22, 14, 16, 22, 8, 10.

(i) Construiți un interval de încredere pentru media timpului de așteptare cu un nivel de încredere de 99%. Interpretați și comentați rezultatul.

(ii) Testați ipoteza că timpul de așteptare este sub 20 de minute pe baza eșantionului dat, cu pragul de semnificație de 0.01. Formulați ipotezele corespunzător.

Problema 2.4 În urma observării funcționării unui grup turbo-generator, s-au exprimat următorii timpi de funcționare neîntreruptă între două avarii consecutive (exprimați în ore):

4256, 4368, 4657, 3873, 1680, 2215, 2290, 1990, 1205, 1300, 2010, 2112, 2192,
2581, 2689, 2892, 2999, 3565, 4933, 5832.

(i) Să se construiască estimatori ai parametrilor distribuției punctuali și cu intervale de încredere, presupunând că timpul de funcționare urmează o distribuție exponențială. Considerați $\alpha = 0.1$.

(ii) Să se testeze dacă acești timpi de funcționare urmează o distribuție exponențială folosind testul χ^2 .